


VE RI
TAS

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE,

PAR

G. DE PONTÉCOULANT,

Membre de la Société royale de Londres et de l'Académie des Sciences de Berlin.

TOME TROISIÈME.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.



1834


HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


PRESERVATION MASTER
AT HARVARD

AVERTISSEMENT.

Le troisième volume de la *Théorie analytique du Système du monde* devait paraître au commencement de cette année. Des difficultés typographiques résultant du grand nombre de formules qu'il contient et du format que j'ai adopté, ont retardé jusqu'à ce jour sa publication. Il me paraît donc juste de prévenir que quelques parties de ce livre, qui étaient entièrement neuves lorsque l'ouvrage fut composé, ont pu, par ce retard indépendant de ma volonté, se trouver déjà développées dans des Mémoires particuliers, lors de son apparition. Telle est, par exemple, dans la théorie des perturbations planétaires, la méthode qui donne les coefficiens du développement en série de la fonction perturbatrice par le moyen des quadratures. M. Poisson n'avait fait qu'indiquer cette méthode, je l'ai présentée ici avec assez d'étendue pour ne plus exiger que des substitutions numériques; à peine alors l'avait-on remarquée, et aujourd'hui elle a déjà reçu d'importantes applications.

J'avais espéré aussi que ce volume comprendrait à la fois la théorie des perturbations planétaires et celle des marées; mais la place que la première a oc-

cupée, les développemens qu'elle a demandés, les exemples numériques que j'ai cru nécessaire de donner, ne m'ont plus laissé l'espace que la seconde exigeait. Je serai donc obligé de reporter cette théorie dans le quatrième volume, qui contiendra en outre celles de la Lune et des Satellites. Ce volume ne se fera pas attendre, et j'aurai rempli l'engagement que j'ai pris de passer en revue dans cet ouvrage les principales parties de la théorie du système du monde.

Dans un supplément au second livre, qui paraîtra en même temps que le troisième volume, j'ai réparé quelques omissions qui m'ont été indiquées dans la théorie des perturbations planétaires.

Ai-je besoin de rappeler ici ce que j'ai dit dans l'Introduction de cet ouvrage sur le but que je me suis proposé en le composant? Je n'ai voulu ni refaire la *Mécanique céleste*, ni simplement la commenter. La première entreprise m'eût paru trop ambitieuse, la seconde trop modeste. J'ai voulu rassembler, dans un même livre, les travaux faits par les géomètres, depuis cinquante ans, pour perfectionner la théorie du système du monde, et qui se trouvent répandus dans des Mémoires épars. Laplace, comme tous les génies créateurs, avait en général préféré ses méthodes à celles qu'auraient pu lui fournir ses devanciers et ses contemporains; moi, dont la seule ambition était de composer un ouvrage utile, j'ai toujours préféré la méthode la plus simple et la plus générale, et lorsque j'ai introduit quelques formules nouvelles, c'est que leurs avantages étaient bien démontrés. Toutes les fois que les cas l'ont exigé, j'ai appliqué à des

exemples particuliers les théories générales, pour en rendre l'intelligence plus facile. Souvent, en traitant le même sujet que l'illustre auteur de la *Mécanique céleste*, il m'a fallu marcher sur ses pas. Mais j'ai mieux aimé m'exposer à tous les désavantages de cette position, que de chercher un ordre d'idées moins logique et moins rationnel. Enfin, j'ai presque toujours adopté les mêmes notations que notre grand géomètre. Cette uniformité dans les notations est un moyen de faciliter beaucoup l'étude des applications de l'analyse aux sciences naturelles : une langue écrite doit donner d'autant moins de peine à comprendre, que ses caractères sont moins nombreux et mieux arrêtés, et je ne connais rien qui prouve plus la stérilité de l'imagination, que cette manie trop fréquente d'inventer des signes nouveaux pour rendre des idées communes. Les jeunes géomètres qui liront mon ouvrage ne seront pas dispensés pour cela d'étudier la *Mécanique céleste*; mais je crois que je leur aurai facilité cette tâche, et s'ils trouvent que j'ai fait, sous ce rapport, un travail utile, j'aurai atteint le seul but que je m'étais proposé.

J'ai cru devoir entrer dans ces détails, parce que quelques personnes, pour la plupart étrangères à la science, quoique ce ne soit pas celles qui en parlent le moins, m'ont paru n'avoir pas bien jugé mon intention ; mais je dois dire en même temps que j'ai eu la satisfaction de voir qu'au contraire les hommes qui connaissent bien l'état actuel de l'astronomie théorique m'ont compris, et c'est à leurs encouragemens que j'ai dû le courage de pousser

jusqu'au bout cette difficile entreprise. On me permettra d'en citer ici, pour preuve, la lettre suivante, qui m'a été adressée par un illustre géomètre, dont la perte récente afflige encore la science. Je prie qu'on veuille bien ne la considérer que comme une approbation donnée à mon ouvrage sous le rapport de son utilité, et qu'on me rende la justice de croire que je sais mieux que personne ce qu'elle peut avoir de trop flatteur pour ma vanité.

Paris, 20 décembre 1834.

Paris, ce 4 Novembre 1829.

Monsieur,

J'ai reçu l'exemplaire que vous avez bien voulu m'adresser de votre Théorie analytique du Système du Monde; *ce nouveau résultat de vos études sur une matière si élevée et si difficile, ne peut que vous faire beaucoup d'honneur parmi les savans; il confirmera pleinement l'opinion avantageuse qu'ils ont déjà conçue de vos talens, par la pièce qui a remporté le grand prix de l'Académie, et surtout par le mémoire où vous avez très heureusement résolu la difficulté élevée entre MM. Laplace et Plana sur un point important du système du monde. Votre ouvrage, Monsieur, est un premier pas vers le but très louable de rendre plus accessibles les recherches profondes contenues dans la* Mécanique céleste; *j'ose prédire que vous serez capable non-seulement de commenter cet ou-*

vrage, mais de le perfectionner sous beaucoup de rapports, car je suis du nombre de ceux qui pensent que le même sujet peut être traité maintenant avec beaucoup plus d'élégance et plus de clarté *. C'était naturellement à M. Poisson à remplir cette tâche, mais l'application de l'Analyse à la Physique semble pour lui un sujet de prédilection auquel il s'est attaché exclusivement.

Recevez, Monsieur, l'assurance des sentimens très distingués avec lesquels j'ai l'honneur d'être

Votre très humble serviteur,

Legendre.

* On doit se rappeler qu'il existait plus que de la froideur entre LEGENDRE et LAPLACE, et certainement c'est plutôt l'homme qui parle ici que le géomètre. Sans doute on peut éclaircir aujourd'hui quelques- unes des parties de la *Mécanique céleste*, mais c'est en protestant de son respect et de son admiration pour ce monument élevé aux sciences mathématiques et astronomiques.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TROISIÈME VOLUME.

LIVRE VI.

Suite de la théorie des mouvemens planétaires.

Théories particulières des sept planètes principales.

NOTES RELATIVES AU LIVRE VI.

NOTES DIVERSES.

Errata.

Pages 9, lignes 1, 11 et 12, *au lieu de* $-\frac{\sin\phi\delta\Pi}{\sin\gamma}$, *lisez* $+\frac{\sin\phi\delta\Pi}{\sin\gamma}$

ibid. 4, 8, 16, *au lieu de* $+\frac{\sin\phi\delta\Pi}{\sin\gamma}$, *lisez* $-\frac{\sin\phi\delta\Pi}{\sin\gamma}$

10, 2, *au lieu de* $+\frac{\delta\Pi\sin\phi}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$, *lisez* $-\frac{\delta\Pi\sin\phi}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$

ibid. 19, *au lieu de* $+\frac{p}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$, *lisez* $-\frac{p}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$

23, 1, *au lieu de* $+\frac{p}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$, *lisez* $-\frac{p}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$

24, 6, *au lieu de* $-\text{tang}\,\frac{1}{2}\lambda\frac{dR}{d\nu}+\frac{1}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$, *lisez* $-\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma\frac{dR}{d\nu}$
$-\frac{1}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\Pi}$

ibid. 24, *au lieu de* $\cos\frac{1}{2}\lambda\frac{dR}{d\lambda}$, *lisez* $\cos\frac{1}{2}\gamma\frac{dR}{d\lambda}$

52, 13, *au lieu de* $aa'\Sigma(B^{(i-1)}+B^{(i+1)})\cos\ldots$, *lisez* ......
$\Sigma aa'(B^{(i-1)}+B^{(i+1)})\cos\ldots$

ibid. 25, *au lieu de* $B^{(i-1)}+B^{(i+1)}$, *lisez* $aa'(B^{(i-1)}+B^{(i+1)})$

53, 8, *au lieu de* $-11(i-1)$, *lisez* $+11(i-1)$

54, 3 en remontant, *au lieu de* $4(i-2)$, *lisez* $4(i-2)^2$

56, 18, *au lieu de* $m'k\cos[i(n't-\text{etc.}]$, *lisez* $-m'k\cos[i(n't-\text{etc.}]$

112, 6 en remontant, *au lieu de* $\cos(i\phi+i'\phi')d\phi d\phi'$ et.... $\sin(i\phi+i'\phi')d\phi d\phi'$, *lisez* $\cos(i\phi-i'\phi')d\phi d\phi'$ et $\sin(i\phi-i'\phi')d\phi d\phi'$

141, 28 }
142, 5 } *changez* les signes de tous les termes de la valeur de F.

178, 1, *au lieu de* aP, *lisez* aP'

ibid. *ib. au lieu de* $-\frac{3adP}{(5n'-2n)dt}$, *lisez* $-\frac{3ad^2P'}{(5n'-2n)^2dt^2}$

ibid. 2, *au lieu de* $-\frac{2adP}{(5n'-2n)dt}$, *lisez* $-\frac{2adP'}{(5n'-2n)dt}$

ibid. *ib.*, *au lieu de* $-\frac{3adP}{(5n'-2n)dt}$, *lisez* $-\frac{3ad^2P}{(5n'-2n)^2dt^2}$

221, 15, *au lieu de* $\sin(9n't-4nt+9\epsilon'-4\epsilon+A+B')$, *lisez* $\sin(9n't-4nt+9\epsilon'-4\epsilon+A'+B)$

223, dernière, *au lieu de* $\frac{m\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a}}$, *lisez* $\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$

Page 224, ligne 2, *au lieu de* $\dfrac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}$, *lisez* $\dfrac{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}$

263, 10, *au lieu de* $e\delta a - \frac{1}{2}\, a\delta e$, *lisez* $\frac{1}{2}\, e\delta a - a\delta e$

294, 2 en remontant, *au lieu de* Halley, *lisez* Pound

336, 26, *au lieu de* $\frac{2}{5}\, mD$, *lisez* $\frac{2}{5}\, mD^2$

349, 3, *au lieu de* $e^{\text{iv}} = 81^\circ\, 52'\, 10'',3$, *lisez* $e^{\text{iv}} = 81^\circ 52' 19'',3$

429, 9, *au lieu de* $(1+\mu^{\text{iv}})$, *lisez* $(1+\mu'')$

437, 14, *au lieu de* $N^{(0)}$, *lisez* $N^{(1)}$

ibid. 15, *au lieu de* $N^{(1)}$, *lisez* $N^{(0)}$

443, 18, 19 et 20, *changez* les signes des trois quantités :

$$a^{\text{v}2}\frac{dM^{(0)}}{da^{\text{iv}}},\quad a^{\text{v}2}\frac{dN^{(0)}}{da^{\text{iv}}},\quad a^{\text{v}2}\frac{dM^{(2)}}{da^{\text{iv}}}$$

444, 2, 3, 12 et 13, *effacez* m^{v}

451, 17, *au lieu de* K, *lisez* $\overline{H}$

ibid. dernière, *au lieu de* $-\dfrac{K^2}{8}$, *lisez* $-\dfrac{\overline{H}^2}{8}$

452, 12, il faut affecter du signe — l'inégalité de cette ligne.

464, 7 et 9, *au lieu de* $3n^{\text{v}} - n^{\text{iv}}$, *lisez* $3n^{\text{vi}} - n^{\text{v}}$

ibid. 14, *au lieu de* $3n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t$, *lisez* $3n^{\text{v}}t - 3n^{\text{vi}}t$.

Addition.

Page 463, après la ligne 12, *ajoutez :*

$$\delta r^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{aligned} &- 0{,}0003464950 \cos(n^{\text{v}}t + \epsilon^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ &- 0{,}0021035534 \cos(2n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}) \\ &+ 0{,}0054534650 \cos(2n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ &+ 0{,}0011739643 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}) \\ &- 0{,}0006295374 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \end{aligned}\right\}$$

$$+ (1+\mu^{\text{vi}}).0{,}0006101657 \cos(3n^{\text{vi}}t - 2n^{\text{v}}t + 3\epsilon^{\text{vi}} - 2\epsilon^{\text{v}} - \varpi^{\text{vi}}).$$

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

LIVRE SIXIÈME.

Théorie des Mouvemens planétaires.

La détermination des inégalités auxquelles peuvent être soumis les mouvemens des corps célestes, soit en vertu de leurs attractions mutuelles, soit par l'action de toute cause étrangère aux forces principales qui les animent, est sans contredit l'objet le plus important de la théorie du système du monde. Nous avons donné dans le second livre les inégalités indépendantes des excentricités et des inclinaisons des orbites, et celles qui dépendent de leur première puissance : ce sont en effet, en général, les plus considérables, et celles par conséquent auxquelles il importe principalement d'avoir égard. Cependant il peut arriver que parmi les inégalités qui dépendent des puissances des excentricités et des inclinaisons d'un ordre plus élevé, et même parmi celles qui sont de l'ordre du carré des forces perturbatrices, il s'en trouve que

quelque circonstance particulière rende sensibles, et auxquelles il soit par cette raison indispensable d'avoir égard. On ne doit donc regarder les résultats auxquels nous sommes parvenu dans le livre II que comme une première approximation des mouvemens planétaires, et elle ne suffirait pas aux besoins de l'Astronomie, dans l'état de perfection où cette science est aujourd'hui parvenue. Nous allons par conséquent revenir sur cet important objet, et nous donnerons dans ce livre l'expression analytique des principales inégalités planétaires provenant des diverses causes qui troublent les mouvemens elliptiques des planètes autour du soleil, de manière que ces formules étant réduites en nombres, les tables qui en résulteront puissent atteindre à toute l'exactitude qu'exige la précision des observations modernes.

CHAPITRE PREMIER.

Développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites jusqu'aux termes dépendans de la septième puissance de ces élémens.

1. Nous avons donné dans le n° 81 du second livre, l'expression de la fonction perturbatrice R développée jusqu'aux termes de l'ordre du carré des excentricités inclusivement; mais on est obligé de porter plus loin ce développement à mesure qu'on veut atteindre à un plus haut degré d'approximation dans la théorie des mouvemens planétaires. Nous allons donc nous occuper d'abord de cette pénible opération.

Considérons l'action réciproque de deux planètes m et m' en mouvement autour du soleil. En désignant par R la fonction qui exprime cette action, on a, n° 48 du second livre

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right], \quad (1)$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de m relatives à trois axes fixes passant par le centre du soleil, r son rayon vecteur dans son orbite, et x', y', z', r' exprimant les mêmes quantités relatives à m'. Si

l'on nomme ρ la distance des deux planètes entre elles, en sorte qu'on ait

$$\rho = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

la valeur précédente pourra s'écrire ainsi :

$$R = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2+r'^2-\rho^2}{2r'^3}\right).$$

Sous cette forme on voit que R ne dépend que de la distance des différens corps du système entre eux et à l'origine des coordonnées, et que cette fonction est totalement indépendante des axes auxquels on rapporte les mouvemens de ces corps.

Cela posé, pour plus de simplicité, prenons pour plan des $x\,y$ un plan passant par la commune intersection des orbites de m et de m', et pour axe des x cette intersection même. Si l'on nomme v l'angle que le rayon r forme avec cette droite, v' l'angle formé par cette même droite et par r', φ et φ' les inclinaisons respectives des orbites de m et de m' sur le plan fixe, on aura

$$x = r\cos v,\ y = r\sin v\cos\varphi,\ \ z = r\sin v\sin\varphi,$$
$$x' = r'\cos v',\ y' = r'\sin v'\cos\varphi',\ \ z = r'\sin v'\sin\varphi',$$

Si l'on substitue ces valeurs dans R, qu'on nomme γ l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et qu'on observe que $\varphi'-\varphi=\gamma$ en faisant, pour abréger,

$$1-\cos\gamma = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\lambda^2$$
$$V = -rr'\sin v\sin v' = \tfrac{1}{2}rr'[\cos(v+v') - \cos(v'-v)];$$

en sorte que λ représente le double du sinus de la

moitié de l'angle que forment entre eux les plans des orbites des deux planètes, on trouvera

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v - v') - \lambda^2 V}} - \frac{r\cos(v' - v)}{r'^2} - \frac{1}{2}\lambda^2 \frac{V}{r'^3}\right],$$

fonction qui ne dépend plus que de l'inclinaison mutuelle des orbites et de la position respective de m et de m' par rapport à la ligne des nœuds.

Soit Π la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m', comptée sur l'orbite de m à partir d'une origine fixe; pour rapporter à la même origine les angles v et v', que nous avons supposés comptés sur les plans des orbites respectives des deux planètes, à partir de leur commune intersection, il suffira de substituer $v - \Pi$ et $v' - \Pi$ à la place de v et de v' dans les expressions précédentes. L'angle v' représentera alors la distance de la planète m' à son nœud, comptée sur l'orbite de m' et augmentée de la longitude de ce nœud, comptée sur le plan de l'orbite de m, de la même origine que l'angle v.

La fonction que nous avons désignée par V deviendra ainsi

$$V = \frac{1}{2} rr' [\cos(v + v' - 2\Pi) - \cos(v' - v)];$$

et c'est cette valeur qu'il faudra substituer dans l'expression précédente de R, qui n'éprouvera pas d'autre altération.

Cette expression conservera la même forme, quel

que soit le plan passant par le centre du soleil, auquel on rapporte le mouvement des deux planètes, pourvu qu'on exprime les coordonnées x, y, z, x', etc., relatives à ce plan, en fonction des coordonnées polaires de m et de m'; elle a donc toute la généralité dont elle est susceptible.

2. Il nous sera nécessaire dans ce qui va suivre d'introduire dans la fonction R les variables qui déterminent la position du plan mobile de l'orbite de m par rapport à un plan fixe quelconque, quantités qu'elle ne renferme qu'implicitement, sous la forme précédente. Pour cela, nommons φ et φ' les inclinaisons respectives, et Π et Π' les longitudes des nœuds des orbites de m et de m'. Sur ce nouveau plan, on aura

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\Pi' - \Pi).$$

En substituant donc dans R à la place de........ $\lambda^2 = 2(1 - \cos\gamma)$ sa valeur, cette quantité se trouvera exprimée en fonction des angles φ, φ', Π et Π', relatifs à un plan fixe quelconque passant par le centre du soleil.

Si l'on rapporte, comme nous l'avons fait n° 86, livre II, le mouvement de m au plan de son orbite primitive, l'inclinaison φ et l'angle $\Pi' - \Pi$ seront de l'ordre des forces perturbatrices, et l'on pourra négliger leur carré quand on fera abstraction des quantités du second ordre par rapport à ces forces. En nommant donc $\bar{\gamma}$ ce que devient γ relativement à un temps quelconque compté de l'instant qu'on a choisi

pour époque, on aura $\varphi' = \gamma$, et par conséquent :

$$\cos \bar{\gamma} = \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma.$$

Il faudra donc dans l'expression de R substituer $2(1 - \cos \bar{\gamma} - \sin \varphi \sin \gamma)$ à la place de λ^2; en nommant $\bar{R}$ la fonction résultante, on aura ainsi :

$$\bar{R} = m' \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v) - \lambda^2 V + 2 \sin \varphi \sin \gamma V}} - \frac{r \cos(v' - v)}{r'^2} - \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{V}{r'^3} + \sin \varphi \sin \gamma \frac{V}{r'^3} \right].$$

On peut observer d'ailleurs que si, pour plan fixe des xy, on prend un plan passant par l'intersection commune des deux orbites, et ayant, relativement à chacune d'elles, la même inclinaison que le plan de l'orbite primitive de m, on aura :

$$x = r \cos(v - \Pi), \quad y = r \sin(v - \Pi) \cos \varphi, \quad z = r \sin(v - \Pi) \sin \varphi,$$
$$x' = r' \cos(v' - \Pi), \quad y' = r' \sin(v' - \Pi) \cos \gamma, \quad z' = r' \sin(v' - \Pi) \sin \gamma.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression (1) de R, et qu'on néglige le carré de $\sin \varphi$, quantité du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, on retrouvera l'expression précédente, et cette expression, d'ailleurs, d'après ce qu'on a vu, est indépendante de la supposition que le plan fixe passe par la commune intersection des orbites de m et de m'.

On conçoit maintenant que si, dans les deux fonctions R et $\bar{R}$, les variables r, r', v, v', et la constante Π, avaient les mêmes valeurs, en sorte que la valeur de la fonction λ fût la seule altérée en passant de l'une

à l'autre, on déduirait immédiatement l'expression du développement de $\overline{R}$ de celui de R, en substituant dans ce dernier $\lambda^2 - 2 \sin \gamma \delta \varphi$ à la place de λ^2; mais, par l'effet du déplacement de la commune intersection des orbites, les quantités v, v' et π ont des valeurs différentes dans les deux fonctions. Commençons donc par déterminer les accroissemens que subissent ces angles lorsqu'on passe de R à $\overline{R}$.

Pour cela considérons le triangle sphérique compris entre le plan de l'orbite primitive de m, celui de son orbite mobile, et le plan de l'orbite de m'. Les trois angles de ce triangle seront φ, $\overline{\gamma}$ et $180° - \gamma$ et, en nommant $\delta\Pi$ le côté opposé à l'angle $\overline{\gamma}$, par les règles de la trigonométrie sphérique, on aura, à très peu près

$$\frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad \delta \Pi + \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}$$

pour les deux autres côtés respectivement opposés aux angles γ et φ.

Maintenant, $v - \Pi$, compté sur le plan fixe, est l'angle que forme le rayon r avec la ligne des nœuds de l'orbite de m', sur l'orbite primitive de m. Si l'on projette sur ce dernier plan le nœud de l'orbite de m' sur le plan mobile de l'orbite de m, l'angle compris entre m et ce même nœud sera égal à l'angle $v - \Pi$, moins le mouvement de la ligne des nœuds pendant le temps t, compté sur l'orbite de m' et projeté sur le plan fixe, c'est-à-dire que cet angle sera égal, à très peu près, à

$$v - \Pi - \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma} \cos \gamma.$$

D'ailleurs, la longitude de l'intersection de l'orbite de m' avec l'orbite mobile de m, comptée de la même origine que les angles v, v' et Π, est $\Pi + \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}$. L'angle v, ou la distance angulaire de m à la droite fixe, d'où les angles sont comptés, devient donc, relativement à l'orbite mobile,

$$v + \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma} (1 - \cos \gamma).$$

Et en désignant par $\bar{v}$, $\bar{v}'$, $\bar{\Pi}$, ce que deviennent les quantités v, v' et Π, relativement à la fonction $\bar{R}$, on aura :

$$\bar{v} - \bar{\Pi} = v - \Pi - (1 - \cos \gamma) \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma} - \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}$$

$$\bar{v}' - \bar{\Pi}' = v' - \Pi - \frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}.$$

C'est-à-dire qu'en passant de la fonction R à la fonction $\bar{R}$, l'angle v croîtra de $-(1 - \cos \gamma)\frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}$, et l'angle Π, qui désigne la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite mobile de m, de $\frac{\sin \varphi \delta \Pi}{\sin \gamma}$, $\delta \Pi$ étant le mouvement pendant le temps t du nœud de l'orbite mobile de m sur le plan fixe; enfin la fonction λ recevra l'accroissement $-\frac{\sin \gamma}{\lambda} \cdot \delta \varphi$. En négligeant donc le carré de $\delta \varphi$ et de $\delta \Pi$ on aura

$$\overline{R} = R - \delta\Pi \sin\varphi \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma \frac{dR}{dv}$$
$$+ \frac{\delta\Pi \sin\varphi}{\sin\gamma} \cdot \frac{dR}{d\Pi} - \frac{\delta\varphi \sin\gamma}{\lambda} \frac{dR}{d\lambda}.$$

A la place de $\delta\Pi$ et de $\delta\varphi$, qui déterminent les variations de l'orbite mobile de m relativement au plan fixe de son orbite primitive, on peut introduire dans l'expression précédente les quantités p et q, que l'on considère ordinairement dans les formules du mouvement troublé, et qui sont des fonctions données de ces mêmes quantités $\delta\Pi$ et $\delta\varphi$. En effet si, comme dans le n° 45 du second livre, on fait

$$p = \delta.\sin\varphi \sin\Pi, \quad q = \delta.\sin\varphi \cos\Pi,$$

en effectuant la différentiation et en supposant, pour plus de simplicité, $\Pi = 0$ dans les résultats, ce qui revient à prendre, comme nous le ferons dans la suite, l'intersection commune des deux orbites pour l'origine d'où les angles sont comptés, on aura

$$p = \sin\varphi\, \delta\Pi, \quad q = \delta\varphi,$$

et par conséquent :

$$\overline{R} = R - p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma \frac{dR}{dv} + \frac{p}{\sin\gamma} \frac{dR}{d\Pi}$$
$$- q \cos \tfrac{1}{2}\gamma \frac{dR}{d\lambda}.$$

Cette valeur est celle qu'il faudra substituer dans les formules des n°s 44 et 45 du second livre, qui déterminent les variations différentielles des élémens du mouvement elliptique de m autour du soleil troublé par l'action de m', et l'on voit qu'il sera facile de dé-

duire par la différentiation des différens termes de R les termes correspondans de $\overline{R}$, ce qui dispensera d'effectuer le développement de cette dernière fonction.

3. Cela posé, si l'on développe l'expression de R par rapport aux puissances ascendantes de λ, on aura :

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)}} - \frac{rr'\cos(v'-v)}{r'^3}\right]$$

$$+ m'.\frac{1}{2}\lambda^2 V\left\{\frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r'^3}\right\}$$

$$+ m'.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\lambda^4 V^2 \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ m'.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\lambda^6 V^3 \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{\frac{7}{2}}}$$

$$+ m'.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\lambda^8 V^4 \frac{1}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(v' - v)]^{\frac{9}{2}}}$$

$$+ \text{etc.};$$

série dont la loi est évidente. Les inclinaisons des orbites des principales planètes l'une sur l'autre étant de très petites quantités, on n'a point considéré jusqu'ici dans leurs perturbations les inégalités dépendantes des puissances des inclinaisons supérieures à la quatrième, et l'on verra en effet dans la suite, que ces inégalités doivent être tout-à-fait insensibles. Nous nous bornerons donc désormais à considérer les trois premiers termes de la précédente série.

Par les formules du mouvement elliptique, on a :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5\right)\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$- \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4\right)\cos 2\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$- \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5\right)\cos 3\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$- \frac{1}{3}e^4 \cos 4\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
3 $$- \frac{125}{384}e^5 \cos 5\,(nt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.},$$

$$v = nt + \varepsilon + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right)\sin 2\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ \frac{103}{96}e^4 \sin 4\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ \frac{1097}{960}e^5 \sin 5\,(nt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.}$$

Les angles $nt + \varepsilon$ et ϖ étant supposés comptés de la même origine que l'angle v, les valeurs donneront celles de $\frac{r'}{a'}$ et de v' en marquant d'un accent les lettres n, e, ε et ϖ.

Si l'on substitue ces valeurs dans R, cette quantité deviendra fonction des longitudes moyennes $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ des deux planètes, des longitudes des périhélies, des demi-grands axes, des excentricités et de l'inclinaison mutuelle des orbites, et l'on pourra la développer en série de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à $nt + \varepsilon$ et $n't + \varepsilon'$, d'après les principes établis n° 48 du second livre.

Pour cela, on supposera d'abord les orbites circulaires, ce qui donnera $r=a$, $r'=a'$, $v=nt+\varepsilon$, $v'=n't+\varepsilon'$, et par conséquent,

$$R'=m'.\left[\frac{1}{\sqrt{a'^2+a^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)}}-\frac{aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)}{a'^3}\right]$$
$$+\frac{m'}{2}\lambda^2V'\left\{\frac{1}{[a'^2+a^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a'^3}\right\}$$
$$+\frac{3m'}{8}.\lambda^4V'^2\frac{1}{[a'^2+a^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]^{\frac{5}{2}}}.$$

En nommant V′ ce que devient V dans la même hypothèse, c'est-à-dire en supposant :

$$V'=\tfrac{1}{2}aa'[\cos(n't+nt+\varepsilon'-\varepsilon-2\Pi)-\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)].$$

On donnera ensuite à a, a', $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$, des accroissemens au, $a'u$, $v_{,}$ et $v'_{,}$, qui comprendront les termes des valeurs de r, r', v et v', qu'on a d'abord négligés ; en sorte qu'on aura :

$$r=a+au,\ r'=a'+a'u',\ v=nt+\varepsilon+v_{,},\ v'=n't+\varepsilon'+v'_{,},$$

et il sera facile de développer R en série convergente par rapport aux puissances ascendantes de e, e' et γ.

En effet, faisons comme dans le n° 48 du second livre.

$$[a^2+a'^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{a}{a'^2}\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$=\frac{1}{2}\Sigma A^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$[a^2+a'^2-2aa'\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)]^{-\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{1}{a'^3}=\frac{1}{2}\Sigma B^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon).$$

Supposons de plus,

$$[a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]^{-\frac{s}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} \Sigma C^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

La caractéristique Σ devant s'étendre à toutes les valeurs entières de i positives ou négatives y compris zéro, en observant qu'on a généralement :

$$\sin(ft + l)\, \Sigma A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$= \Sigma A^{(i)} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + l]$$
$$\cos(ft + l)\, \Sigma A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$= \Sigma A^{(i)} \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + l]$$
$$\sin(ft + l)\, \Sigma i^{2g+1} A^{(i)} \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$= -\Sigma i^{2g+1} A^{(i)} \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + l],$$

$ft + l$ étant un angle et g un nombre entier quelconques, et de même pour les fonctions

$$\Sigma B^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

et $$\Sigma C^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

La fonction R', en substituant pour V' sa valeur, et en faisant, pour abréger, $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon = \alpha$ deviendra

$$R' = \frac{m'}{2}\Sigma.\left[A^{(i)} - \frac{1}{4}\lambda^2 aa'B^{(i-1)} + \frac{3}{64}\lambda^4 a^2a'^2(2C^{(i)} + C^{(i-2)})\right]\cos i\alpha$$
$$+ \frac{m'}{8}\lambda^2\Sigma.\left[aa'B^{(i-1)} - \frac{3}{8}\lambda^2 a^2a'^2(C^{(i)} + C^{(i-2)})\right]\cos(i\alpha + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi)$$
$$+ \frac{3m'}{128}\lambda^4 a^2a'^2\Sigma.C^{(i-2)}\cos(i\alpha + 4nt + 4\varepsilon - 4\Pi).$$

On pourra, dans cette formule, supposer, quel que soit i,

$$A^{(i)}_{\frac{3}{2}} = aa'B^{(i)}, \qquad A^{(i)}_{\frac{5}{2}} = a^2a'^2C^{(i)}.$$

Par cette nouvelle notation, les quantités $A^{(i)}$, $A^{(i)}_{\frac{3}{2}}$, $A^{(i)}_{\frac{5}{2}}$, seront toutes trois des fonctions homogènes de a et a' de la dimension -1, ce qui donnera à la fois plus de régularité et de simplicité aux formules. Nous ne faisons toutefois qu'indiquer cette notation à ceux qui voudraient s'occuper du développement de la fonction R, et nous continuerons à considérer les quantités $B^{(i)}$ et $C^{(i)}$ pour conserver l'analogie des formules suivantes avec celles du second livre.

Cela posé, on pourra regarder $\Sigma A^{(i)} \cos i\alpha$ comme une fonction donnée des trois quantités a, a' et α, que nous supposerons variables. Or, si l'on nomme z une pareille fonction, et que les variables devenant simultanément $a + au$, $a' + a'u'$, $\alpha + v'_{,} - v_{,}$, on désigne par q_{m+n+p} le coefficient du produit $a^m a'^n u^m u'^n (v_{,} - v'_{,})^p$, dans le développement de la fonction résultante, on sait qu'on aura généralement :

$$q_{m+n+p} = \frac{\dfrac{d^{m+n+p}z}{da^m\, da'^n\, d\alpha^p}}{(1.2.3\ldots m)\,(1.2.3\ldots n)\,(1.2.3\ldots p)}.$$

On déterminera par cette formule les coefficiens des différens termes du développement de la fonction $\Sigma A^{(i)} \cos i\alpha$; en remplaçant ensuite u, u', $v_{,}$ et $v'_{,}$, par leurs valeurs, on développera les produits successifs $u^m u'^n (v'_{,} - v_{,})^p$ en séries ordonnées par rapport aux excentricités des orbites et prolon-

gées jusqu'aux puissances de ces quantités auxquelles on voudra avoir égard. Quand ces séries seront formées, il sera facile d'obtenir par une simple substitution le terme de R dépendant d'un argument donné et d'un ordre déterminé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Ce que nous venons de dire s'applique évidemment aux quantités $\Sigma B^{(i)} \cos i\alpha$, $\Sigma C^{(i)} \cos i\alpha$, et peut s'étendre aux quantités $\Sigma B^{(i)} \cos(i\alpha + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi)$, $\Sigma C^{(i)} \cos(i\alpha + 4nt + 4\varepsilon - 4\Pi)$; il suffira de regarder ces deux dernières comme contenant les variables a, a', α, et $nt + \varepsilon$, et de les développer comme les précédentes par la formule de Taylor étendue à quatre variables.

On pourra donc, dans tous les cas, former, d'après les principes précédens, le développement de la fonction R, étendu jusqu'à tel ordre de termes qu'on voudra considérer, et l'on n'éprouvera en général d'autres difficultés que celles qui résultent de la longueur des calculs, qui se compliquent de plus en plus à mesure qu'on a égard à des puissances plus élevées des excentricités et des inclinaisons.

4. Considérons le terme le plus général de ce développement, que nous supposerons de cette forme :

$$m'k \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - f'\omega' - f\omega - 2f''\Pi).$$

Il résulte de ce qui précède, que les angles ω, ω', et Π, ne peuvent être introduits dans l'expression de R que par la substitution des valeurs de r, r', v, v' et V. Or, par les formules du mouvement elliptique, on voit que l'angle $nt + \varepsilon$ sous les signes sinus ou cosi-

nus est toujours accompagné de l'angle $-\varpi$ dans les expressions de r et de v, de même l'angle $n't+\varepsilon'$ est toujours accompagné de l'angle $-\varpi'$; enfin dans la valeur de V l'angle $n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon$ sera toujours accompagné de l'angle -2Π. Cela posé, le terme qui précède peut s'écrire ainsi :

$$m'k\cos[(i'-f'-f'')(n't+\varepsilon')-(i+f+f'')(nt+\varepsilon) +f'(n't+\varepsilon'-\varpi')+f(nt+\varepsilon-\varpi) +f''(n't+nt+\varepsilon'+\varepsilon-2\Pi)].$$

Les trois derniers angles qui entrent sous le signe cosinus appartiennent aux termes périodiques des valeurs de r, r', v, v' et V. Or, si les orbites étaient circulaires et dans le même plan, le coefficient de $n't$ serait égal à celui de nt, puisque l'angle $n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon$ et ses multiples serait le seul dont le cosinus entrerait dans la valeur de R, en sorte que le coefficient de $n't$ ne peut surpasser celui de nt ou en être surpassé que par l'introduction des termes dépendans des excentricités et des inclinaisons. Il suit de là qu'on aura généralement entre les quantités i, i', f, f', f'', la relation suivante :

$$i'-f'-f''=i+f+f'', \text{ ou bien } i'-i-f-f'-2f''=0,$$

i, i', f, f', f'', étant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques.

Quant au degré d'élévation du coefficient k, nous remarquerons que les valeurs elliptiques de r, v, r', v', sont telles, que les coefficiens des *sinus* ou *cosinus* de chaque multiple de l'anomalie moyenne $nt+\varepsilon-\varpi$ forme une série procédant suivant les puissances de

l'excentricité e, et dans laquelle les exposans vont en croissant successivement de deux unités à partir du premier terme, qui a pour exposant le nombre même qui multiplie l'angle $nt+\varepsilon$ ou l'angle ω. Il en est de même des valeurs de r' et v' relativement à l'excentricité e' et à l'angle ω'. Observons encore que la quantité V étant toujours multipliée par λ^2, le coefficient de Π dans le terme dépendant de l'angle $v+v'-2\Pi$, ou de ses multiples, sera égal à l'exposant de la puissance de λ dont ce terme est affecté. Il suit de là que dans les termes indépendans des inclinaisons la somme des coefficiens des angles ω et ω', pris avec le signe $+$, sera la limite inférieure de la puissance des excentricités à laquelle s'élève le terme que l'on considère dans le développement de R, et que dans la partie dépendante à la fois des excentricités et des inclinaisons la somme des multiples des angles ω, ω' et Π, pris positivement, indiquera l'ordre le moins élevé des termes du développement de R qui dépendent d'un argument déterminé.

Ainsi le coefficient k sera de l'ordre $f+f'+2f''$ ou $i'-i$, d'après la relation $i'-i-f-f'-2f''=0$, et ce coefficient se composera d'une série dont le premier terme aura la forme $Ae^f e'^{f'} \lambda^{2f''}$, les nombres f, f', f'', étant pris avec le signe $+$, et A étant une quantité indépendante des excentricités et des inclinaisons; le deuxième terme de cette série serait de l'ordre $i'-i+2$, le troisième de l'ordre $i'-i+4$, et ainsi de suite; en sorte que le facteur commun $e^f e'^{f'} \lambda^{2f''}$ ôté, tous les termes de la série k ne renfer-

meront que des puissances paires de e, e' et λ. En ne considérant donc parmi les termes qui dépendent de l'angle $i'n't - int$ que ceux qui sont de l'ordre le moins élevé, le terme général de R sera de la forme

$$Ae^{f}e'^{f'}\lambda^{2f''}\cos(i'n't - int - f'\varpi' - f\varpi - 2f''\pi).$$

Les nombres f, f', f'', sont supposés positifs; si l'un d'eux, f par exemple, était négatif, le terme précédent serait de l'ordre $i' - i + 2f$, la somme des nombres f, f' et $2f''$, pris avec leurs signes, devant toujours être égale à $i' - i$.

Les considérations précédentes sont surtout utiles lorsqu'on veut déterminer *à priori* les termes du développement de R qui dépendent d'un argument donné. On voit que si parmi ces termes le moins élevé est de l'ordre l, le même argument ne se reproduira plus que parmi les termes de l'ordre $l + 2$, ou de l'ordre $l + 4$, etc.; de sorte que si l est un nombre pair, tous les termes seront d'ordre pair, et ils seront d'ordre impair dans le cas contraire. Ce résultat provient non-seulement de la forme des valeurs de r, r', v, v', mais encore de ce que la fonction R doit être indépendante de l'origine des longitudes.

Ainsi, par exemple, si l'on proposait de déterminer les termes de R relatifs à l'argument $5n't - 2nt$, on voit que les moins élevés parmi ces termes seraient de l'ordre $5 - 2$ ou du troisième ordre, les suivans du cinquième, et ainsi de suite. Si l'on considère seulement les termes du troisième ordre,

on aura $f+f'+2f''=0$; les nombres f, f', f'', étant supposés positifs, on pourra former six combinaisons différentes, selon que deux ou un seul d'entre eux seront supposés nuls, et les autres successivement égaux à 1, 2 ou 3, f'' excepté, qui ne peut être que nul ou égal à 1. Les termes dont il s'agit seront donc compris dans l'une des formes suivantes :

$$M^{(0)}e^3 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 3\omega),$$
$$M^{(1)}e^2e' \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 2\omega - \omega'),$$
$$M^{(2)}ee'^2 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \omega - 2\omega'),$$
$$M^{(3)}e'^3 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 3\omega'),$$
$$M^{(4)}e\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \omega - 2\Pi),$$
$$M^{(5)}e'\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \omega' - 2\Pi).$$

Quant aux quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., il sera facile de les déterminer d'après ce qui a été dit n° 3.

On a souvent besoin, dans la théorie des perturbations planétaires, d'avoir les différences de R, soit par rapport à r, soit par rapport à v, soit enfin par rapport à la latitude s. Pour les obtenir, j'observe que la valeur elliptique de r peut se mettre sous la forme $r=a(1+u)$, en désignant par u une fonction dépendante de l'excentricité e, mais indépendante de a. On tire de là $\frac{dr}{da}=1+u$; et comme r est la seule des variables r, v, r', v', qui renferme a, on aura

$$\frac{dR}{da}=\frac{dR}{dr}\cdot(1+u)=\frac{dR}{dr}\cdot\frac{r}{a},$$

ou bien

$$r\frac{dR}{dr} = a\frac{dR}{da}.$$

Quant à la différentielle partielle $\frac{dR}{dv}$, on a $v = nt + \varepsilon + v_{,}$, en désignant par $v_{,}$ une suite de sinus de l'anomalie vraie $nt + \varepsilon - \varpi$ et de ses multiples. La partie périodique du rayon vecteur est composée d'une suite de cosinus semblables ; on aura donc la différence de R par rapport à v, en différentiant la valeur de cette fonction par rapport à l'angle ε, en tant qu'il n'est pas accompagné de l'angle ϖ, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\varepsilon},$$

pourvu qu'en prenant cette dernière différence on ait soin de considérer comme constans les angles $\varepsilon - \varpi$ qui sont introduits dans R, soit par le rayon vecteur r, soit par la partie périodique de la longitude v, et qui, par cette raison, ne doivent pas varier ; c'est-à-dire qu'on aura généralement, en faisant tout varier et observant que $\frac{dR}{ndt} = \frac{dR}{d\varepsilon}$,

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{ndt} + \frac{dR}{d\varpi}.$$

Enfin, pour avoir la différence de la fonction que nous avons désignée par $\overline{R}$, par rapport à s, j'observe que s étant la latitude de m au-dessus du plan auquel on rapporte son mouvement, si l'on nomme φ l'inclinaison de l'orbite sur ce plan fixe, on aura

$s = \sin\varphi \sin(v - \Pi)$, et par conséquent

$$\frac{d\overline{R}}{d\varphi} = \frac{d\overline{R}}{ds}\sin(v - \Pi).$$

En désignant d'ailleurs par γ l'inclinaison mutuelle des orbites de m et m', on a, nº 2,

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\Pi' - \Pi).$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à γ et à φ, que dans la différentielle on fasse $\varphi = 0$, $\varphi' = \gamma$ et $\Pi' = \Pi$, ce qui suppose que l'on prend, comme nous le faisons, pour plan fixe le plan de l'orbite primitive de m, on aura $d\gamma = -d\varphi$, et par conséquent,

$$\frac{d\overline{R}}{ds} = -\frac{1}{\sin(v - \Pi)}\cdot\frac{dR}{d\gamma}.$$

Si m était en mouvement sur le plan même de l'orbite de m', on aurait $s = \sin\gamma\sin(v - \Pi)$, et par conséquent,

$$s\frac{d\overline{R}}{ds} = -\sin\gamma\frac{dR}{d\gamma}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède $\lambda = 2\sin\frac{1}{2}\gamma$, ce qui donne $d\lambda = \cos\frac{1}{2}\gamma d\gamma$, et par suite

$$s\frac{d\overline{R}}{ds} = -\frac{\sin^2\gamma}{\lambda}\cdot\frac{dR}{d\lambda}.$$

Les valeurs de $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dv}$, $\frac{d\overline{R}}{ds}$, formeront ainsi des séries composées de termes semblables à ceux du développement de R dont ils dérivent.

Enfin, au moyen de l'équation

$$\overline{R} = R - p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma \frac{dR}{dv} + \frac{p}{\sin\gamma} \frac{dR}{d\Pi} - q \cos \tfrac{1}{2}\gamma \frac{dR}{d\lambda},$$

lorsque le développement de la fonction R sera effectué, on pourra en déduire, par de simples différentiations, la valeur de la fonction $\overline{R}$, qui est celle qu'il faudra substituer dans les formules du n° 44 du second livre.

Par le n° 81 du second livre, on a

$$\frac{d\overline{R}}{ds} = \frac{1}{\sin(v - \Pi)} \cdot \frac{d\overline{R}}{dq}.$$

Si l'on substitue pour $\frac{d\overline{R}}{dq}$ sa valeur tirée de l'équation précédente, on retrouvera la valeur de $\frac{d\overline{R}}{ds}$ à laquelle nous venons de parvenir d'une manière différente.

On peut, pour fixer les idées, supposer que R est la valeur de la fonction perturbatrice lorsqu'on regarde comme immobile le plan de l'orbite de m, et $\overline{R}$ la valeur complète de cette fonction, en ayant égard aux variations de ce plan. Or on voit que les différences partielles de la fonction $\overline{R}$ relatives au grand axe a, à l'excentricité e, à la longitude ϖ du périhélie de l'orbite de m, et à la longitude ϵ de l'époque, sont égales aux différences correspondantes de R, aux quantités près du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, alors qu'on prend pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée; en sorte que dans les formules qui déterminent les variations de ces élémens on peut substituer R à la place de $\overline{R}$,

puisque nous négligeons ici les quantités dépendantes du carré des masses.

Il n'en est pas de même relativement aux variations des quantités qui déterminent la position du plan de l'orbite, et la valeur de $\bar{R}$ donnera

$$\frac{d\bar{R}}{dp} = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda\frac{dR}{dv} + \frac{1}{\sin\gamma}\frac{dR}{d\pi}$$
$$\frac{d\bar{R}}{dq} = -\cos\frac{1}{2}\gamma\frac{dR}{d\lambda}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (9) et (10) du n° 44 du livre deuxième, en observant que $\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\epsilon} + \frac{dR}{d\varpi}$, on aura :

$$dp = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\cos\frac{1}{2}\lambda\frac{dR}{d\lambda},$$
$$dq = \frac{andt}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{dR}{d\pi} + \frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{dR}{d\epsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right)\right].$$

En joignant aux formules (1), (2), (3), (4), (8), du n° 44, livre II, les deux précédentes, on aura par la simple différentiation des différens termes du développement de R, prise par rapport aux élémens de l'orbite de m, les inégalités correspondantes de chacun de ces élémens; ce qui facilite extrêmement le calcul de leurs variations.

5. Après ces considérations générales sur la réduction de la fonction R en série, nous allons nous occuper de déterminer l'expression analytique des différens termes de ce développement. Nous avons donné dans le n° 81 du second livre, les termes qui dépendent de la première et de la seconde puissance des excentri-

cités; mais comme nous avons omis de comprendre parmi ces derniers les termes dépendans des inclinaisons, pour rendre notre travail complet, nous reprendrons ici ce développement à partir des termes du second ordre, et nous le pousserons ensuite jusqu'aux termes du sixième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Il est peu probable qu'il se rencontre des cas où l'on soit obligé de porter plus loin les approximations; au reste, on y parviendrait sans difficulté d'après les mêmes principes.

Les Mémoires de l'Institut pour 1808 contiennent un travail de Burckhardt sur le même sujet; mais des erreurs considérables s'étaient glissées dans ses résultats; nous nous sommes attaché à les faire disparaître; nous avons vérifié avec soin les termes que cet astronome avait calculés, et nous leur avons ajouté les termes dépendans des inclinaisons qu'il avait omis. L'introduction dans nos formules du sinus de la moitié de l'inclinaison mutuelle des orbites au lieu de la tangente des inclinaisons employée jusqu'ici, rend le calcul de ces derniers termes aussi facile et aussi symétrique que celui des termes qui dépendent simplement des excentricités.

Enfin M. Binet a bien voulu me communiquer dernièrement le manuscrit de ses recherches sur le même objet, présentées à l'Académie des Sciences en 1812, et dont j'ai parlé n° 96 du second livre. Cet immense travail contient la préparation de toutes les quantités nécessaires au développement de la fonction R jusqu'aux termes du septième ordre; il a servi à vérifier de nouveau quelques-uns de mes résultats,

et m'a mis à même d'offrir avec quelque confiance aux géomètres le travail le plus étendu, et, je l'espère, le plus correct qui ait encore été publié sur ce sujet.

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE EN SÉRIE ORDONNÉE PAR RAPPORT AUX PUISSANCES ASCENDANTES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.

Termes qui sont de l'ordre le moins élevé parmi ceux qui dépendent du même argument.

Termes du second ordre.

6. Soit :

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}.e^2.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ & + M^{(1)}.ee'.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'] \\ & + M^{(2)}.e'^2.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi'], \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = \frac{m'}{8}.\left[i(4i-5)A^{(i)} + 2(2i-1)a\frac{dA^{(i)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right]$$

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{4}.\left\{[4(i-1)^2+2(i-1)]A^{(i-1)} + [2+4(i-1)]a\frac{dA^{(i-1)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right\},$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{8}.\left\{[4(i-2)^2+9(i-2)+4]A^{(i-2)} + [6+4(i-2)]a\frac{dA^{(i-2)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2}\right\},$$

Nous laissons subsister dans ces formules les puissances des quantités $i-1$ et $i-2$, sans les développer, pour la commodité des calculs numériques et la facilité des vérifications.

Les différences de la fonction $A^{(i)}$ ainsi que celles de la fonction $B^{(i)}$ relatives à a' ont été converties en différences relatives à a, au moyen des formules du n° 52 du livre second, formules qu'on peut prolonger aussi loin qu'on le voudra, et qu'on peut étendre à la fonction $C^{(i)}$.

Soit :

$$R = N^{(0)}.\lambda^2.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi],$$

on aura

$$N^{(0)} = \frac{m'}{8}.aa'\,B^{(i-1)}.$$

Pour ne pas compliquer les formules, nous avons ici, comme dans ce qui va suivre, écrit séparément les termes dépendans des inclinaisons ; ils doivent évidemment être réunis aux termes du même ordre dépendans des excentricités.

Les moyens de vérification pour des calculs aussi compliqués que ceux dont dépendent en général les quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, sont précieux. Nous allons en indiquer plusieurs.

La fonction perturbatrice, lorsqu'on ne considère que la partie dépendante de la distance mutuelle de m à m', étant symétrique par rapport aux coordonnées de la planète troublée et de la planète perturbatrice, il en résulte que sa valeur ne variera pas si l'on y change ce qui est relatif à m en ce qui est relatif à m', et réciproquement ; d'où l'on peut conclure que si dans la valeur précédente de $M^{(0)}$ on change a en a', et i en $-i+2$, et les différences de $A^{(i)}$ prises par rapport à a en différences relatives à a', la valeur résultante sera égale à $M^{(3)}$. Comme les quantités $M^{(0)}$, $M^{(3)}$ ont été calculées séparément, il sera facile de vérifier de cette manière leur exactitude, et l'on verra qu'on peut étendre une vérification semblable aux différens termes de la fonction R, quel que soit leur ordre.

Un second moyen de vérification résulte de la remarque qu'a faite Burckhardt, que si l'on compare par voie de soustraction les coefficiens de $A^{(i)}$ et de ses différences successives dans $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, et les quantités semblables relatives aux cubes et aux puissances supérieures des excentricités, on arrive en général à des différences constantes. Ainsi, dans les termes du second ordre, les secondes différences des coefficiens de $A^{(i)}$ et de $\frac{dA^{(i)}}{da}$ sont égales à 2^2; dans ceux du troisième ordre, les troisièmes différences de ces coefficiens sont égales à 3^3; dans les termes du quatrième ordre, les quatrièmes différences sont égales à 4^4; dans ceux du cinquième ordre, les cinquièmes différences sont égales à 5^5, et ainsi de suite.

Par exemple, dans les termes précédens, les coefficiens de $A^{(i)}$ sont :

		1res diff.	2mes diff.
Pour $M^{(0)}$	$4i^2 - 5i$		
		$+ 7i$	
Pour $M^{(1)}$	$4i^2 + 2i$		$+ 4$
		$+ 7i + 4$	
Pour $M^{(2)}$	$4i^2 + 9i + 4$		

Les coefficiens de $\frac{dA^{(i)}}{da}$ sont :

		1res diff.
Pour M°	$4i - 2$	
		$+ 4$
Pour $M^{(1)}$	$4i + 2$	
		$+ 4$
Pour $M^{(2)}$	$4i + 6$	

Les coefficiens de $\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}$ sont les mêmes dans les trois quantités.

Il sera facile, si on le juge convenable, de développer, par rapport aux puissances de i, les valeurs de $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$; pour vérifier les expressions résultantes, il ne faudra plus alors comparer ensemble les coefficiens appartenant à la même différence de $A^{(i)}$, mais bien ceux qui sont relatifs au même angle périodique. Nous ne nous arrêterons pas à exposer ce calcul qui n'offre aucune difficulté.

Termes du troisième ordre.

7. Soit :

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}.e^3 \,.\, \cos\,[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 3\varpi] \\ & + M^{(1)}.e^2e' \,.\, \cos\,[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 2\varpi - \varpi'] \\ & + M^{(2)}.ee'^2 \,.\, \cos\,[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi - 2\varpi'] \\ & + M^{(3)}.e'^3 \,.\, \cos\,[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 3\varpi'], \end{aligned}$$

On aura

$$M^{(0)} = -\frac{m'}{48}.\left\{\begin{aligned} & (8i^3 - 30i^2 + 26i)A^{(i)} \\ & + (12i^2 - 27i + 9)\,a\,\frac{dA^{(i)}}{da} \\ & + (6i - 6)\,a^2\,\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}, \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(1)} = +\frac{m'}{16}.\left\{\begin{aligned} & [8(i-1)^3 - 6(i-1)^2 - 5(i-1)]\,A^{(i-1)} \\ & + [12(i-1)^2 - (i-1) - 4]\,a\,\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\ & + [6(i-1) + 1]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}, \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(2)} = -\frac{m'}{16}.\left\{\begin{aligned} & [8(i-2)^3 + 18(i-2)^2 + 8(i-2)]\,A^{(i-2)} \\ & + [12(i-2)^2 + 25(i-2) + 10]\,a\,\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\ & + [6(i-2) + 8]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3}, \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(3)} = +\frac{m'}{48}.\left\{\begin{aligned} & [8(i-3)^3 + 42(i-3)^2 + 65(i-3) + 27]\,A^{(i-3)} \\ & + [12(i-3)^2 + 51(i-3) + 51]\,a\,\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\ & + [6(i-3) + 15]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3}. \end{aligned}\right\}$$

On peut vérifier ces valeurs par les moyens exposés dans le numéro précédent. La troisième différence des coefficiens de $A^{(i)}$ est 27 ou 3^3, la deuxième différence des coefficiens de $\frac{dA^{(i)}}{da}$ de même 27, la première différence des coefficiens de $\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}$, est 7.

Soit

$$R = N^{(0)} e \lambda^2 \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt - \varpi - 2\Pi],$$
$$+ N^{(1)} e \lambda'^2 \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt - \varpi' - 2\Pi],$$

On aura

$$N^{(0)} = - \frac{m'aa'}{16} \left[(2i - 3) B^{(i-1)} + a \frac{dB^{(i-1)}}{da} \right],$$
$$N^{(1)} = + \frac{m'aa'}{16} \left[2iB^{(i-2)} + a \frac{dB^{(i-2)}}{da} \right].$$

On pourrait déduire sans aucun calcul les termes dépendans des inclinaisons de ceux qui dépendent simplement des excentricités, par les considérations suivantes. Soient

$$\tfrac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos [i'(n't + \epsilon') - i(nt + \epsilon)]$$
$$\tfrac{1}{2} \Sigma A^{(i)} \cos [(i + 1)(n't + \epsilon') - (i - 1)(nt + \epsilon)],$$

deux fonctions qu'il s'agit de développer en y faisant varier les quantités a, a', nt et $n't$, conformément à ce qui a été dit n° 3. Si le développement de la première est effectué, on en déduira immédiatement celui de la seconde, en y changeant i' en $i + 1$, et i en $i - 1$; mais si après avoir développé la première fonction on y suppose $i' = i$, et que dans le développement de la seconde on se borne à considérer les termes dépendans des argumens qui se forment par

voie d'addition, comme ces termes résultent nécessairement d'un des trois facteurs suivans,........ $\sin(ft+l)\Sigma A^{(i)}\cos p$, $\cos(ft+l)\Sigma A^{(i)}\cos p$, $\sin(ft+l)\Sigma i^{2k+1}A^{(i)}\sin p$, où l'on fait, pour abréger, $p = i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$, et qu'en n'ayant égard qu'à ces termes, on a

$$\sin(ft+l).\Sigma A^{(i)}\cos p = \tfrac{1}{2}\Sigma A^{(i)}\sin(p+ft+l)$$
$$\cos(ft+l).\Sigma A^{(i)}\cos p = \tfrac{1}{2}\Sigma A^{(i)}\cos(p+ft+l)$$
$$\sin(ft+l).\Sigma i^{2k+1}A^{(i)}\sin p = -\tfrac{1}{2}\Sigma i^{2k+1}A^{(i)}\cos(p+ft+l).$$

Il est évident, en comparant ces relations à celles qui leur sont analogues dans le n° 3, qu'on aura le coefficient d'un terme quelconque du développement de la fonction $\frac{1}{2}\Sigma.A^{(i)}\cos[(i+1)(n't+\varepsilon')-(i-1)(nt+\varepsilon)]$, en divisant par deux le coefficient du terme correspondant du développement de la fonction $\frac{1}{2}\Sigma.A^{(i)}\cos[i'(n't+\varepsilon')-i(nt+\varepsilon)]$, dans laquelle on suppose $i'=i$, après y avoir fait les substitutions indiquées plus haut.

Cela posé, la fonction R', n° 3, en ne considérant que les termes dont nous nous occupons en ce moment, devient

$$\begin{aligned} R' = {} & \frac{m'}{2}.\Sigma A^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon) \\ & + \frac{m'}{8}\lambda^2\Sigma.aa'B^{(i)}\cos[(i+1)(n't+\varepsilon')-(i-1)(nt+\varepsilon)-2\Pi] \\ & + \frac{3m'}{32}\lambda^4\Sigma.a^2a'^2C^{(i)}\cos[(i+2)(n't+\varepsilon')-(i-2)(nt+\varepsilon)-4\Pi]. \end{aligned}$$

Si dans le développement de la fonction...... $\frac{m'}{2}\Sigma.A^{(i)}\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$, on désigne donc

par i' le coefficient de $n't$ pour le distinguer du coefficient de nt, en multipliant chacun des termes de cette série par $\frac{1}{8}\lambda^2$, et en y changeant i' en $i+1$, i en $i-1$, et $A^{(i)}$ en $aa'\,B^{(i)}$, on aura le terme correspondant de la fonction $\frac{m'}{8}\lambda^2\ \Sigma\ aa'B^{(i)}\cos\left[(i+1)(n't+\varepsilon')-(i-1)(nt+\varepsilon)\right]$, et en multipliant ces mêmes termes par $\frac{3}{32}\lambda^4$, et en y changeant i' en $i+2$, i en $i-2$ et $A^{(i)}$ en $a^2a'^2\,C^{(i)}$, on aura le terme correspondant du développement de la fonction $\frac{3}{32}\cdot m'\lambda^4\,\Sigma\,a^2a'^2\,C^{(i)}\cos\left[(i+2)(n't+\varepsilon')-(i-2)(nt+\varepsilon)\right]$.

On peut observer que ce résultat subsistera encore même après qu'on aura converti, comme on le fait ordinairement, les différences partielles de $A^{(i)}$ relatives à a' en différences partielles relatives à a; ce qui tient à ce que les fonctions $aa'\,B^{(i)}$, $a^2a'^2\,C^{(i)}$, sont comme $A^{(i)}$ des fonctions homogènes en a et a' de l'ordre -1.

Cette remarque facilitera beaucoup la détermination des termes de la fonction perturbatrice qui dépendent des inclinaisons mutuelles des orbites; mais on ne doit pas oublier qu'elle ne s'applique qu'aux termes dépendans des argumens formés par voie d'addition, et qu'elle ne saurait s'étendre aux autres termes.

Termes du quatrième ordre.

8. Soit

$$
\begin{aligned}
R = {} & M^{(0)} e^4 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 4\varpi] \\
& + M^{(1)} e^3 e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 3\varpi - \varpi'] \\
& + M^{(2)} e^2 e'^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 2\varpi - 2\varpi'] \\
& + M^{(3)} e e'^3 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - \varpi - 3\varpi'] \\
& + M^{(4)} e'^4 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 4\varpi'],
\end{aligned}
$$

on aura

$$
M^{(0)} = + \frac{m'}{384} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& (16i^4 - 120i^3 + 283i^2 - 206i) A^{(i)} \\
& + (32i^3 - 168i^2 + 236i - 64)\, a \frac{dA^{(i)}}{da} \\
& + (24i^2 - 78i + 48)\, a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\
& + (8i - 12)\, a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i)}}{da^4},
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
M^{(1)} = - \frac{m'}{96} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& [16(i-1)^4 - 52(i-1)^3 + 22(i-1)^2 + 26(i-1)] A^{(i-1)} \\
& + [32(i-1)^3 - 60(i-1)^2 - 10(i-1) + 18]\, a \frac{dA^{(i-1)}}{da} \\
& + [24(i-1)^2 - 21(i-1) - 9]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\
& + [8(i-1) - 2]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4},
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
M^{(2)} = + \frac{m'}{64} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& [16(i-2)^4 + 16(i-2)^3 - 29(i-2)^2 - 20(i-2)] A^{(i-2)} \\
& + [32(i-2)^3 + 48(i-2)^2 - 16(i-2) - 20]\, a \frac{dA^{(i-2)}}{da} \\
& + [24(i-2)^2 + 36(i-2) + 2]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\
& + [8(i-2) + 8]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4},
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
M^{(3)} = - \frac{m'}{96} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& [16(i-3)^4 + 84(i-3)^3 + 130(i-3)^2 + 54(i-3)] A^{(i-3)} \\
& + [32(i-3)^3 + 156(i-3)^2 + 218(i-3) + 78]\, a \frac{dA^{(i-3)}}{da} \\
& + [24(i-3)^2 + 93(i-3) + 81]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\
& + [8(i-3) + 18]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4},
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
M^{(4)} = + \frac{m'}{384} \cdot \left\{
\begin{aligned}
& [16(i-4)^4 + 152(i-4)^3 + 499(i-4)^2 + 646(i-4) + 256] A^{(i-4)} \\
& + [32(i-4)^3 + 264(i-4)^2 + 692(i-4) + 568]\, a \frac{dA^{(i-4)}}{da} \\
& + [24(i-4)^2 + 150(i-4) + 228]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-4)}}{da^2} \\
& + [8(i-4) + 28]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-4)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i-4)}}{da^4}.
\end{aligned}
\right\}
$$

La première différence des coefficiens de $a^3\frac{d^3A}{da^3}$ est $+10$, la deuxième différence des coefficiens de $a^2\frac{d^2A}{da^2}$ est $+68$, la troisième des coefficiens de $a\frac{dA}{da}$ est $+256$, et la quatrième des coefficiens de A est de même $+256$.

Soit

$$\begin{aligned} R = {} & N^{(0)}e^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 4nt + 4\varepsilon - 2\varpi - 2\Pi] \\ & + N^{(1)}ee'\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 4nt + 4\varepsilon - \varpi - \varpi' - 2\Pi] \\ & + N^{(2)}e'^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 4nt + 4\varepsilon - 2\varpi' - 2\Pi], \end{aligned}$$

on aura

$$N^{(0)} = +\frac{m'aa'}{32}\left\{\begin{array}{l} [4(i-1)^2 - 9(i-1) + 3]\,B^{(i-1)} \\ + [4(i-1) - 4]\,a\frac{dB^{(i-1)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2}, \end{array}\right\}$$

$$N^{(1)} = -\frac{m'aa'}{16}\left\{\begin{array}{l} [4(i-2)^2 + 6(i-2) - 4]\,B^{(i-2)} \\ + [4(i-2) + 4]\,a\frac{dB^{(i-2)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2}, \end{array}\right\}$$

$$N^{(2)} = +\frac{m'aa'}{32}\left\{\begin{array}{l} [4(i-3)^2 + 21(i-3) + 27]\,B^{(i-3)} \\ + [4(i-3) + 12]\,a\frac{dB^{(i-3)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-3)}}{da^2}. \end{array}\right\}$$

Soit enfin

$$R = N^{(3)}.\lambda^4.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 4nt + 4\varepsilon - 4\Pi],$$

on aura

$$N^{(3)} = \frac{3m'a^2a'^2}{128}.\,C^{(i-2)}.$$

Termes du cinquième ordre.

9. Soit

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}e^5 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - 5\varpi] \\ & + M^{(1)}e^4e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - 4\varpi - \varpi'] \\ & + M^{(2)}e^3e'^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - 3\varpi - 2\varpi'] \\ & + M^{(3)}e^2e'^3 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - 2\varpi - 3\varpi'] \\ & + M^{(4)}ee'^4 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - \varpi - 4\varpi'] \\ & + M^{(5)}e'^5 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - 5\varpi'], \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = -\frac{m'}{3840}\left\{\begin{array}{l} [32i^5 - 400i^4 + 1790i^3 - 3360i^2 + 2194i]\,A^{(i)} \\ + [80i^4 - 760i^3 + 2375i^2 - 2640i + 625]\,a\frac{dA^{(i)}}{da} \\ + [80i^3 - 540i^2 + 1040i - 500]\,a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\ + [40i^2 - 170i + 150]\,a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} \\ + [10i - 20]\,a^4\frac{d^4A^{(i)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i)}}{da^5}, \end{array}\right\}$$

$$M^{(1)} = +\frac{m'}{768}\left\{\begin{array}{l} +\left\{\begin{array}{l} 32(i-1)^5 - 224(i-1)^4 + 446(i-1)^3 \\ -129(i-1)^2 - 206(i-1) \end{array}\right\} A^{(i-1)} \\ +\left\{\begin{array}{l} 80(i-1)^4 - 392(i-1)^3 + 419(i-1)^2 \\ +138(i-1) - 128 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\ +[80(i-1)^3 - 252(i-1)^2 + 98(i-1) + 80]\,a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\ +[40(i-1)^2 - 70(i-1)]\,a^3\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} \\ +[10(i-1) - 7]\,a^4\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5}, \end{array}\right.$$

$$M^{(2)} = -\frac{m'}{384}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 32(i-2)^5 - 48(i-2)^4 - 134(i-2)^3 \\ +114(i-2)^2 + 104(i-2) \end{array}\right\} A^{(i-2)} \\ +\left\{\begin{array}{l} 80(i-2)^4 - 24(i-2)^3 - 271(i-2)^2 \\ +3(i-2) + 90 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\ +[80(i-2)^3 + 36(i-2)^2 - 148(i-2) - 36]\,a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\ +[40(i-2)^2 + 30(i-2) - 23]\,a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} \\ +[30(i-2) + 6]\,a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5}, \end{array}\right.$$

$$M^{(3)} = +\frac{m'}{384}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 32(i-3)^5 + 128(i-3)^4 + 50(i-3)^3 \\ -217(i-3)^2 - 135(i-3) \end{array}\right\} A^{(i-3)} \\ +\left\{\begin{array}{l} 80(i-3)^4 + 344(i-3)^3 + 305(i-3)^2 \\ -175(i-3) - 156] \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\ +[80(i-3)^3 + 324(i-3)^2 + 302(i-3) - 3]\,a^2\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\ +[40(i-3)^2 + 130(i-3) + 81]\,a^3\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\ +[10(i-3) + 19]\,a^4\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5}, \end{array}\right.$$

$$M^{(4)} = -\frac{m'}{768}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 32(i-4)^5 + 304(i-4)^4 + 998(i-4)^3 \\ +1292(i-4)^2 + 512(i-4) \end{array}\right\} A^{(i-4)} \\ +\left\{\begin{array}{l} 80(i-4)^4 + 712(i-4)^3 + 2147(i-4)^2 \\ +2474(i-4) + 824 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-4)}}{da} \\ +[80(i-4)^3 + 612(i-4)^2 + 1448(i-4) + 1024]\,a^2\frac{d^2A^{(i-4)}}{da^2} \\ +[40(i-4)^2 + 230(i-4) + 312]\,a^3\frac{d^3A^{(i-4)}}{da^3} \\ +[10(i-4) + 32]\,a^4\frac{d^4A^{(i-4)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i-4)}}{da^5}, \end{array}\right.$$

La première différence des coefficiens de $a^3 \frac{d^3A}{da^3}$ est $+10$, la deuxième différence des coefficiens de $a^2 \frac{d^2A}{da^2}$ est $+68$, la troisième des coefficiens de $a\frac{dA}{da}$ est $+256$, et la quatrième des coefficiens de A est de même $+256$.

Soit

$$\begin{aligned} R = {} & N^{(0)}e^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 2\varpi - 2\Pi] \\ & + N^{(1)}ee'\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - \varpi - \varpi' - 2\Pi] \\ & + N^{(2)}e'^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 2\varpi' - 2\Pi], \end{aligned}$$

on aura

$$N^{(0)} = +\frac{m'aa'}{32}\left\{\begin{aligned} & [4(i-1)^2 - 9(i-1) + 3]B^{(i-1)} \\ & + [4(i-1) - 4]a\frac{dB^{(i-1)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2}, \end{aligned}\right\}$$

$$N^{(1)} = -\frac{m'aa'}{16}\left\{\begin{aligned} & [4(i-2)^2 + 6(i-2) - 4]B^{(i-2)} \\ & + [4(i-2) + 4]a\frac{dB^{(i-2)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2}, \end{aligned}\right\}$$

$$N^{(2)} = +\frac{m'aa'}{32}\left\{\begin{aligned} & [4(i-3)^2 + 21(i-3) + 27]B^{(i-3)} \\ & + [4(i-3) + 12]a\frac{dB^{(i-3)}}{da} + a^2\frac{d^2B^{(i-3)}}{da^2}. \end{aligned}\right\}$$

Soit enfin

$$R = N^{(3)}.\lambda^4.\cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 4\Pi],$$

on aura

$$N^{(3)} = \frac{3m'a^2a'^2}{128}.C^{(i-2)}.$$

Termes du cinquième ordre.

9. Soit

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}e^5 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 5\varpi] \\ & + M^{(1)}e^4e' \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 4\varpi - \varpi'] \\ & + M^{(2)}e^3e'^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 3\varpi - 2\varpi'] \\ & + M^{(3)}e^2e'^3 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 2\varpi - 3\varpi'] \\ & + M^{(4)}ee'^4 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - \varpi - 4\varpi'] \\ & + M^{(5)}e'^5 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 5\varpi'], \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = -\frac{m'}{3840}\left\{\begin{aligned} & [32i^5 - 400i^4 + 1790i^3 - 3360i^2 + 2194i]A^{(i)} \\ & + [80i^4 - 760i^3 + 2375i^2 - 2640i + 625]a\frac{dA^{(i)}}{da} \\ & + [80i^3 - 540i^2 + 1040i - 500]a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\ & + [40i^2 - 170i + 150]a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} \\ & + [10i - 20]a^4\frac{d^4A^{(i)}}{da^4} + a^5\frac{d^5A^{(i)}}{da^5}, \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(1)} = +\frac{m'}{768}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 32(i-1)^5 - 224(i-1)^4 + 446(i-1)^3 \\ -129(i-1)^2 - 206(i-1) \end{array}\right\} A^{(i-1)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 80(i-1)^4 - 392(i-1)^3 + 419(i-1)^2 \\ +138(i-1) - 128 \end{array}\right\} a\,\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\
+[80(i-1)^3 - 252(i-1)^2 + 98(i-1) + 80]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\
+[40(i-1)^2 - 70(i-1)]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} \\
+[10(i-1) - 7]\,a^4\,\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5},
\end{array}\right.$$

$$M^{(2)} = -\frac{m'}{384}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 32(i-2)^5 - 48(i-2)^4 - 134(i-2)^3 \\ +114(i-2)^2 + 104(i-2) \end{array}\right\} A^{(i-2)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 80(i-2)^4 - 24(i-2)^3 - 271(i-2)^2 \\ + 3(i-2) + 90 \end{array}\right\} a\,\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\
+[80(i-2)^3 + 36(i-2)^2 - 148(i-2) - 36]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\
+[40(i-2)^2 + 30(i-2) - 23]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} \\
+[10(i-2) + 6]\,a^4\,\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5},
\end{array}\right.$$

$$M^{(3)} = +\frac{m'}{384}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 32(i-3)^5 + 128(i-3)^4 + 50(i-3)^3 \\ -217(i-3)^2 - 135(i-3) \end{array}\right\} A^{(i-3)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 80(i-3)^4 + 344(i-3)^3 + 305(i-3)^2 \\ -175(i-3) - 156] \end{array}\right\} a\,\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\
+[80(i-3)^3 + 324(i-3)^2 + 302(i-3) - 3]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\
+[40(i-3)^2 + 130(i-3) + 81]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\
+[10(i-3) + 19]\,a^4\,\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5},
\end{array}\right.$$

$$M^{(4)} = -\frac{m'}{768}\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 32(i-4)^5 + 304(i-4)^4 + 998(i-4)^3 \\ +1292(i-4)^2 + 512(i-4) \end{array}\right\} A^{(i-4)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 80(i-4)^4 + 712(i-4)^3 + 2147(i-4)^2 \\ +2474(i-4) + 824 \end{array}\right\} a\,\frac{dA^{(i-4)}}{da} \\
+[80(i-4)^3 + 612(i-4)^2 + 1448(i-4) + 1024]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-4)}}{da^2} \\
+[40(i-4)^2 + 230(i-4) + 312]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-4)}}{da^3} \\
+[10(i-4) + 32]\,a^4\,\frac{d^4A^{(i-4)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5A^{(i-4)}}{da^5},
\end{array}\right.$$

$$M^{(5)} = +\frac{m'}{3840}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 32(i-5)^5 + 480(i-5)^4 + 2710(i-5)^3 \\ +7055(i-5)^2 + 8174(i-5) + 3125 \end{array}\right\} A^{(i-5)} \\ + \left\{\begin{array}{l} 80(i-5)^4 + 1080(i-5)^3 + 5255(i-5)^2 \\ +10820(i-5) + 7845 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-5)}}{da} \\ + [80(i-5)^3 + 900(i-5)^2 + 3290(i-5) + 3890]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-5)}}{da^2} \\ + [40(i-5)^2 + 330(i-5) + 670]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-5)}}{da^3} \\ + [10(i-5) + 45]\, a^4 \frac{d^4A^{(i-5)}}{da^4} + a^5 \frac{d^5A^{(i-5)}}{da^5}. \end{array}\right.$$

La première différence des coefficiens de $a^4 \frac{d^4A^{(i-5)}}{da^4}$ est 13; la deuxième des coefficiens de $a^3 \frac{d^3A}{da^3}$ est 127; la troisième des coefficiens de $a^2 \frac{d^2A}{da^2}$ est 845, la quatrième des coefficiens de $a \frac{dA}{da}$ est 3125, la cinquième des coefficiens de A est 3125.

Soit

$$\begin{aligned} R = {} & N^{(0)}e^3\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 3\varpi - 2\Pi] \\ & + N^{(1)}e^2e'\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 2\varpi - \varpi' - 2\Pi] \\ & + N^{(2)}ee'^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - \varpi - 2\varpi' - 2\Pi] \\ & + N^{(3)}e'^3\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 5nt + 5\epsilon - 3\varpi' - 2\Pi], \end{aligned}$$

on aura

$$N^{(0)} = -\frac{m'aa'}{384}\cdot\left\{\begin{array}{l} [8(i-1)^3 - 42(i-1)^2 + 59(i-1) - 16]\, B^{(i-1)} \\ + [12(i-1)^2 - 39(i-1) + 24]\, a\frac{dB^{(i-1)}}{da} \\ + [6(i-1) - 9]\, a^2 \frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2} + a^3 \frac{d^3B^{(i-1)}}{da^3}, \end{array}\right\}$$

$$N^{(1)} = +\frac{m'aa'}{128}\cdot\left\{\begin{array}{l} [8(i-2)^3 - 2(i-2)^2 - 8(i-2) + 12]\, B^{(i-2)} \\ + [12(i-2)^2 + 3(i-2) - 17]\, a\frac{dB^{(i-2)}}{da} \\ + [6(i-2) + 2]\, a^2 \frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2} + a^3 \frac{d^3B^{(i-2)}}{da^3}, \end{array}\right\}$$

$$N^{(2)} = -\frac{m'aa'}{128}\cdot\left\{\begin{array}{l} [8(i-3)^3 + 38(i-3)^2 + 33(i-3) + 19]\, B^{(i-3)} \\ + [12(i-3)^2 + 45(i-3) + 27]\, a\frac{dB^{(i-3)}}{da} \\ + [6(i-3) + 13]\, a^2 \frac{d^2B^{(i-3)}}{da^2} + a^3 \frac{d^3B^{(i-3)}}{da^3}, \end{array}\right\}$$

$$N^{(3)} = +\frac{m'aa'}{384}\cdot\left\{\begin{array}{l}[8(i-4)^3 + 78(i-4)^2 + 248(i-4) + 256]\,B^{(i-4)} \\ +[12(i-4)^2 + 87(i-4) + 156]\,a\,\frac{dB^{(i-4)}}{da} \\ +[6(i-4) + 24]\,a^2\,\frac{d^2B^{(i-4)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3B^{(i-4)}}{da^3}.\end{array}\right\}$$

Soit enfin

$$\begin{array}{l}R = N^{(4)}e\lambda^4 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - \varpi - 4\Pi] \\ \quad + N^{(5)}e'\lambda^4 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 5nt + 5\varepsilon - \varpi' - 4\Pi],\end{array}$$

on aura

$$N^{(4)} = -\frac{3m'a^2a'^2}{256}\cdot\left\{2(i-3)C^{(i-2)} + a\,\frac{dC^{(i-2)}}{da}\right\},$$

$$N^{(5)} = \frac{3m'a^2a'^2}{256}\cdot\left\{(2i+1)C^{(i-2)} + a\,\frac{dC^{(i-2)}}{da}\right\}.$$

Termes du sixième ordre.

10. Soit

$$\begin{array}{l}R = M^{(0)}e^6 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 6\varpi] \\ \quad + M^{(1)}e^5e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 5\varpi - \varpi'] \\ \quad + M^{(2)}e^4e'^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 4\varpi - 2\varpi'] \\ \quad + M^{(3)}e^3e'^3 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 3\varpi - 3\varpi'] \\ \quad + M^{(4)}e^2e'^4 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 2\varpi - 4\varpi'] \\ \quad + M^{(5)}ee'^5 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - \varpi - 5\varpi'] \\ \quad + M^{(6)}e'^6 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 6\varpi'],\end{array}$$

on aura

$$M^{(0)} = +\frac{m'}{46080}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(64i^6 - 1200i^5 + 8660i^4 - 27925i^3 \\ +48538i^2 - 29352i)\end{array}\right\}A^{(i)} \\ +\left\{\begin{array}{l}(192i^5 - 2880i^4 + 15780i^3 - 37890i^2 \\ +36324i - 7776)\end{array}\right\}a\,\frac{dA^{(i)}}{da} \\ +(240i^4 - 2760i^3 + 10725i^2 - 15810i + 6480)\,a^2\,\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\ +(160i^3 - 1320i^2 + 3220i - 2160)\,a^3\,\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} \\ +(60i^2 - 315i + 360)\,a^4\,\frac{d^4A^{(i)}}{da^4} \\ +(12i - 30)\,a^5\,\frac{d^5A^{(i)}}{da^5} + a^6\,\frac{d^6A^{(i)}}{da^6},\end{array}\right\}.$$

$$M^{(1)} = -\frac{m'}{7680}\cdot\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 64(i-1)^6 - 768(i-1)^5 + 3180(i-1)^4 \\ -5930(i-1)^3 + 1028(i-1)^2 + 2194(i-1) \end{array}\right\} A^{(i-1)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 192(i-1)^5 - 1760(i-1)^4 + 5020(i-1)^3 \\ -3890(i-1)^2 - 1836(i-1) + 1250 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\
+\left\{\begin{array}{l} 240(i-1)^4 - 1600(i-1)^3 + 2775(i-1)^2 \\ -520(i-1) - 875 \end{array}\right\} a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\
+[160(i-1)^3 - 720(i-1)^2 + 660(i-1) + 100]\, a^3\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} \\
+[60(i-1)^2 - 160(i-1) + 50]\, a^4\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} \\
+[12(i-1) - 14]\, a^5\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5} + a^6\frac{d^6A^{(i-1)}}{da^6},
\end{array}\right.$$

$$M^{(2)} = \frac{m'}{3072}\cdot\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 64(i-2)^6 - 336(i-2)^5 + 116(i-2)^4 \\ +61(i-2)^3 - 722(i-2)^2 - 824(i-2) \end{array}\right\} A^{(i-2)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 192(i-2)^5 - 640(i-2)^4 - 508(i-2)^3 \\ +1910(i-2)^2 + 292(i-2) - 640 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\
+\left\{\begin{array}{l} 240(i-2)^4 - 440(i-2)^3 - 915(i-2)^2 \\ +838(i-2) + 352 \end{array}\right\} a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\
+[160(i-2)^3 - 120(i-2)^2 - 380(i-2) + 80]\, a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} \\
+[60(i-2)^2 - 5(i-2) - 56]\, a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4} \\
+[12(i-2) + 2]\, a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5} + a^6\frac{d^6A^{(i-2)}}{da^6},
\end{array}\right.$$

$$M^{(3)} = -\frac{m'}{2304}\cdot\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} 64(i-3)^6 + 96(i-3)^5 - 532(i-3)^4 \\ -642(i-3)^3 + 880(i-3)^2 + 702(i-3) \end{array}\right\} A^{(i-3)} \\
+\left\{\begin{array}{l} 192(i-3)^5 + 480(i-3)^4 - 804(i-3)^3 \\ -2130(i-3)^2 + 264(i-3) + 702 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\
+\left\{\begin{array}{l} 240(i-3)^4 + 720(i-3)^3 - 345(i-3)^2 \\ -1350(i-3) - 225 \end{array}\right\} a^2\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\
+[160(i-3)^3 + 480(i-3)^2 + 100(i-3) - 264]\, a^3\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\
+[60(i-3)^2 + 150(i-3) + 42]\, a^4\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4} \\
+[12(i-3) + 18]\, a^5\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5} + a^6\frac{d^6A^{(i-3)}}{da^6},
\end{array}\right.$$

$$M^{(4)} = \frac{m'}{3072} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 64(i-4)^6 + 528(i-4)^5 + 1236(i-4)^4 \\ +1271(i-4)^3 - 2302(i-4)^2 - 1280(i-4) \end{array} \right\} A^{(i-4)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 192(i-4)^5 + 1600(i-4)^4 + 4132(i-4)^3 \\ +2350(i-4)^2 - 2220(i-4) - 1648 \end{array} \right\} a \frac{dA^{(i-4)}}{da} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 240(i-4)^4 + 1880(i-4)^3 + 4485(i-4)^2 \\ +3302(i-4) - 200 \end{array} \right\} a^2 \frac{d^2A^{(i-4)}}{da^2} \\ + [160(i-4)^3 + 1080(i-4)^2 + 2100(i-4) + 1024] a^3 \frac{d^3A^{(i-4)}}{da^3} \\ + [60(i-4)^2 + 305(i-4) + 344] a^4 \frac{d^4A^{(i-4)}}{da^4} \\ + [12(i-4) + 34] a^5 \frac{d^5A^{(i-4)}}{da^5} + a^6 \frac{d^6A^{(i-4)}}{da^6}, \end{array} \right\}$$

$$M^{(5)} = -\frac{m'}{7680} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 64(i-5)^6 + 960(i-5)^5 + 5420(i-5)^4 \\ +15110(i-5)^3 + 16228(i-5)^2 + 6250(i-5) \end{array} \right\} A^{(i-5)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 192(i-5)^5 + 2720(i-5)^4 + 14300(i-5)^3 \\ +33710(i-5)^2 + 34684(i-5) + 10970 \end{array} \right\} a \frac{dA^{(i-5)}}{da} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 240(i-5)^4 + 3040(i-5)^3 + 13575(i-5)^2 \\ +25180(i-5) + 15625 \end{array} \right\} a^2 \frac{d^2A^{(i-5)}}{da^2} \\ + [160(i-5)^3 + 1680(i-5)^2 + 5620(i-5) + 5900] a^3 \frac{d^3A^{(i-5)}}{da^3} \\ + [60(i-5)^2 + 460(i-5) + 850] a^4 \frac{d^4A^{(i-5)}}{da^5} \\ + [12(i-5) + 50] a^5 \frac{d^5A^{(i-5)}}{da^5} + a^6 \frac{d^6A^{(i-5)}}{da^6}, \end{array} \right\}$$

$$M^{(6)} = \frac{m'}{46080} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 64(i-6)^6 + 1392(i-6)^5 + 12020(i-6)^4 \\ + 50185(i-6)^3 + 117238(i-6)^2 \\ +125616(i-6) + 46656 \end{array} \right\} A^{(i-6)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 192(i-6)^5 + 3840(i-6)^4 + 29700(i-6)^3 \\ +110310(i-6)^2 + 194964(i-6) + 129456 \end{array} \right\} a \frac{dA^{(i-6)}}{da} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 240(i-6)^4 + 4200(i-6)^3 + 26925(i-6)^2 \\ + 74670(i-6) + 75240 \end{array} \right\} a^2 \frac{d^2A^{(i-6)}}{da^2} \\ + [160(i-6)^3 + 2280(i-5)^2 + 10660(i-6) + 16320] a^3 \frac{d^3A^{(i-6)}}{da^3} \\ + [60(i-6)^2 + 615(i-6) + 1560] a^4 \frac{d^4A^{(i-6)}}{da^4} \\ + [12(i-6) + 66] a^5 \frac{d^5A^{(i-6)}}{da^5} + a^6 \frac{d^6A^{(i-6)}}{da^6}. \end{array} \right\}$$

La première différence des coefficiens de $a^5 \frac{d^5A}{da^5}$ est 164, la seconde des coefficiens de $a^4 \frac{d^4A}{da^4}$ est 204 la

troisième des coefficiens de $a^3\frac{d^3A}{da^3}$ est 1956, la quatrième des coefficiens de $a^2\frac{d^2A}{da^2}$ est 12792, la cinquième des coefficiens de $a\frac{dA}{da}$ est 46656; enfin la sixième des coefficiens de A est 46656.

Soit

$$\begin{aligned}
R = {} & N^{(0)}e^4\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 4\varpi - 2\Pi] \\
& + N^{(1)}e^3e'\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 3\varpi - \varpi' - 2\Pi] \\
& + N^{(2)}e^2e'^2\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 2\varpi - 2\varpi' - 2\Pi] \\
& + N^{(3)}ee'^3\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - \varpi - 3\varpi' - 2\Pi] \\
& + N^{(4)}e'^4\lambda^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 6nt + 6\varepsilon - 4\varpi' - 2\Pi],
\end{aligned}$$

on aura

$$N^{(0)} = +\frac{m'aa'}{3062}\cdot\left\{\begin{aligned}
& \left\{\begin{aligned} & 16(i-1)^4 - 152(i-1)^3 + 475(i-1)^2 \\ & -528(i-1) + 125 \end{aligned}\right\} B^{(i-1)} \\
& + [32(i-1)^3 - 216(i-1)^2 + 416(i-1) - 200]\, a\frac{dB^{(i-1)}}{da} \\
& + [24(i-1)^2 - 102(i-1) + 90]\, a^2\frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2} \\
& + [8(i-1) - 16]\, a^3\frac{d^3B^{(i-1)}}{da^3} + a^4\frac{d^4B^{(i-1)}}{da^4},
\end{aligned}\right\}$$

$$N^{(1)} = -\frac{m'aa'}{768}\cdot\left\{\begin{aligned}
& \left\{\begin{aligned} & 16(i-2)^4 - 52(i-2)^3 - 50(i-2)^2 \\ & +108(i-2) - 130 \end{aligned}\right\} B^{(i-2)} \\
& + [32(i-2)^3 - 60(i-2)^2 - 280(i-2) + 488]\, a\frac{dB^{(i-2)}}{da} \\
& + [24(i-2)^2 - 69(i-2) + 66]\, a^2\frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2} \\
& + [8(i-2) - 2]\, a^3\frac{d^3B^{(i-2)}}{da^3} + a^4\frac{d^4B^{(i-2)}}{da^4},
\end{aligned}\right\}$$

$$N^{(2)} = +\frac{m'aa'}{512}\cdot\left\{\begin{aligned}
& \left\{\begin{aligned} & 16(i-3)^4 + 48(i-3)^3 - 37(i-3)^2 \\ & -180(i-3) + 193 \end{aligned}\right\} B^{(i-3)} \\
& + [32(i-3)^3 + 96(i-3)^2 - 40(i-3) + 24]\, a\frac{dB^{(i-3)}}{da} \\
& + [24(i-3)^2 + 60(i-3)]\, a^2\frac{d^2B^{(i-3)}}{da^2} \\
& + [8(i-3) + 12]\, a^3\frac{d^3B^{(i-3)}}{da^3} + a^4\frac{d^4B^{(i-3)}}{da^4},
\end{aligned}\right\}$$

$$N^{(3)} = -\frac{m'aa'}{768}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}16(i-4)^4+148(i-4)^3+418(i-4)^2\\+140(i-4)-284\end{array}\right\}B^{(i-4)}\\+[32(i-4)^3+252(i-4)^2+532(i-4)+420]\,a\,\frac{dB^{(i-4)}}{da}\\+[24(i-4)^2+189(i-4)+276]\,a^2\,\frac{d^2B^{(i-4)}}{da^2}\\+[8(i-4)+26]\,a^3\,\frac{d^3B^{(i-4)}}{da^3}+a^4\,\frac{d^4B^{(i-4)}}{da^4},\end{array}\right\}$$

$$N^{(4)} = +\frac{m'aa'}{3072}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}16(i-5)^4+248(i-5)^3+1411(i-5)^2\\+3480(i-5)+3125\end{array}\right\}B^{(i-5)}\\+[32(i-5)^3+408(i-5)^2+1712(i-5)+2360]\,a\,\frac{dB^{(i-5)}}{da}\\+[24(i-5)^2+222(i-5)+510]\,a^2\,\frac{d^2B^{(i-5)}}{da^2}\\+[8(i-5)+40]\,a^3\,\frac{d^3B^{(i-5)}}{da^3}+a^4\,\frac{d^4B^{(i-5)}}{da^4}.\end{array}\right\}$$

Soit enfin

$$\begin{aligned}R = {} & N^{(5)}e^2\lambda^4\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+4nt+4\varepsilon-2\varpi-4\Pi]\\ & +N^{(6)}ee'\lambda^4\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+4nt+4\varepsilon-\varpi-\varpi'-4\Pi]\\ & +N^{(7)}e'^2\lambda^4\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+4nt+4\varepsilon-2\varpi'-4\Pi],\end{aligned}$$

on aura

$$N^{(5)} = \frac{3m'a^2a'^2}{1024}\cdot\left\{[4i^2-5i+50]\,C^{(i-2)}+[4i-14]\,a\,\frac{dC^{(i-2)}}{da}+a^2\,\frac{d^2C^{(i-2)}}{da^2}\right\},$$

$$N^{(6)} = \frac{3m'a^2a'^2}{512}\cdot\left\{[4(i-1)^2-14(i-1)-8]\,C^{(i-3)}+[4(i-1)-6]\,a\,\frac{dC^{(i-3)}}{da}+a^2\,\frac{d^2C^{(i-3)}}{da^2}\right\};$$

$$N^{(7)} = \frac{3m'a^2a'^2}{1024}\cdot\left\{[4(i-2)^2+17(i-2)+18]\,C^{(i-4)}+[4(i-2)+10]\,a\,\frac{dC^{(i-4)}}{da}+a^2\,\frac{d^2C^{(i-4)}}{da^2}\right\}.$$

Termes dépendans du carré et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, qui peuvent être ramenés à la même forme que les termes dépendans des puissances d'un ordre moins élevé de ces deux élémens.

Termes du deuxième ordre qui ont même argument que les termes indépendans des excentricités.

11. Soit

$$R = M^{(0)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi' - \varpi]$$
$$+ M^{(1)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)],$$

on aura, n° 81, livre II,

$$M^{(0)} = \frac{m'ee'}{4} \cdot \left\{ [4(i+1)^2 - 2(i+1)] A^{(i+1)} - 2a \frac{dA^{(i+1)}}{da} - a^2 \frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} \right\}.$$

$$M^{(1)} = \frac{m'}{8} \cdot \left\{ (e^2 + e'^2) \left(-4i^2 A^{(i)} + 2a \frac{dA^{(i)}}{da} + a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \right) - \frac{\lambda^2}{2} aa' (B^{(i-1)} + B^{(i+1)}) \right\}$$

i pouvant prendre, comme dans les formules précédentes, toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro.

Termes du troisième ordre qui ont même argument que ceux du premier ordre.

12. Soit

$$R = M^{(0)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi' - 2\varpi]$$
$$+ M^{(1)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$
$$+ M^{(2)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi']$$
$$+ M^{(3)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - 2\varpi' + \varpi],$$

on aura

$$M^{(0)} = \frac{m'e^2e'}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} [-8(i+1)^3 + 14(i+1)^2 - 5(i+1)] A^{(i+1)} \\ [-4(i+1)^2 + 7(i+1) - 4] a \frac{dA^{(i+1)}}{da} \\ [2(i+1) + 1] a^2 \frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} + a^3 \frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3}, \end{array} \right\}$$

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{m'e^3}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (8i^3 - 10i^2 + 2i)\, A^{(i)} + (4i^2 - 7i + 3)\, a \frac{dA^{(i)}}{da} \\ - (2i + 2)\, a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} - a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3}, \end{array} \right\} \\ + \frac{m'ce'^2}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 16i^3 A^{(i)} + (8i^2 - 8i - 4)\, a \frac{dA^{(i)}}{da} - (4i + 8)\, a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\ - 2a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3}, \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$M^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{m'e^3}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - [8(i-1)^3 + 14(i-1)^2 + 5(i-1) + 1]\, A^{(i-1)} \\ - [4(i-1)^2 - (i-1) - 7]\, a \frac{dA^{(i-1)}}{da} + [2(i-1) + 7]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\ + a^3 \frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}, \end{array} \right\} \\ + \frac{m'e^2e'}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - [16(i-1)^3 + 8(i-1)^2]\, A^{(i-1)} - [8(i-1)^2 - 8(i-1) - 8]\, a \frac{dA^{(i-1)}}{da} \\ + [4(i-1) + 10]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} + 2a^3 \frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}, \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$M^{(3)} = \frac{m'ee'^2}{16} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + [8(i-2)^3 + 18(i-2)^2 + 8(i-2)]\, A^{(i-2)} \\ + [4(i-2)^2 - (i-2) - 10]\, a \frac{dA^{(i-2)}}{da} \\ - [2(i-2) + 8]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} - a^3 \frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3}. \end{array} \right\}$$

Nous omettrons les termes de même forme qui dépendent des inclinaisons, parce qu'il n'en peut résulter, dans les applications, que des quantités insensibles. Il en sera de même dans toute cette partie du développement de la fonction R jusqu'aux termes du cinquième ordre, qui demandent une attention particulière, à cause de leur importance dans la théorie de Jupiter et Saturne.

Termes du quatrième ordre qui ont même argument que les termes indépendans des excentricités et des inclinaisons.

13. Soit

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)} \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2\varpi' - 2\varpi] \\ & + M^{(1)} \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + \varpi' - \varpi] \\ & + M^{(2)} \cos [i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)], \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = \frac{m'e^2e'^2}{64} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [\ 16(i+2)^4 - 56(i+2)^3 + 61(i+2)^2 - 20(i+2)]\, A^{(i+2)} \\ & + [-16(i+2)^2 + 36(i+2) - 20]\, a \frac{dA^{(i+2)}}{da} \\ & + [-\ 8(i+2)^2 + 18(i+2) + \ 2]\, a^2 \frac{d^2A^{(i+2)}}{da^2} \\ & + 8a^3 \frac{d^3A^{(i+2)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i+2)}}{da^4}, \end{aligned} \right\}$$

$$M^{(1)} = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{m'e^3e'}{32} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [-16(i+1)^4 + 28(i+1)^3 - 14(i+1)^2 + 2(i+1)]\, A^{(i+1)} \\ & + [\ \ 12(i+1)^2 - 18(i+1) + 6]\, a \frac{dA^{(i+1)}}{da} \\ & + [\ \ \ 8(i+1)^2 - \ 9(i+1) - 3]\, a^2 \frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} \\ & - 6a^3 \frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3} - a^4 \frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}, \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{m'ee'^3}{32} \cdot \left\{ \begin{aligned} & [-16(i+1)^4 + 28(i+1)^3 - 10(i+1)^2 + 2(i+1)]\, A^{(i+1)} \\ & [\ \ 20(i+1)^2 - 18(i+1) - 6]\, a \frac{dA^{(i+1)}}{da} \\ & [\ \ \ 8(i+1)^2 - \ 9(i+1) - 21]\, a^2 \frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} \\ & - 10a^3 \frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3} - a^4 \frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$M^{(2)} = \left\{ \begin{aligned} & + \frac{m'e^4}{128} \cdot \left\{ \begin{aligned} & (16i^4 - 9i^2)\, A^{(i)} - 8i^2 a \frac{dA^{(i)}}{da} \\ & - 8i^2a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + 4a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i)}}{da^4}, \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{m'e'^4}{128} \cdot \left\{ \begin{aligned} & (16i^4 - 17i^2)\, A^{(i)} - (24i^2 - 24)\, a \frac{dA^{(i)}}{da} \\ & - (8i^2 - 36)\, a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + 12a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i)}}{da^4}, \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{m'e^2e'^2}{32} \left\{ \begin{aligned} & 16i^4A^{(i)} - (16i^2 - 4)\, a \frac{dA^{(i)}}{da} \\ & - (8i^2 - 14)\, a^2 \frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + 8a^3 \frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4 \frac{d^4A^{(i)}}{da^4}. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Termes du quatrième ordre qui ont mêmes argumens que les termes du deuxième ordre.

14. Soit

$$\begin{aligned}R = {} & M^{(0)} \cos\,[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon + \varpi' - 3\varpi] \\ & + M^{(1)} \cos\,[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi] \\ & + M^{(2)} \cos\,[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - \varpi - \varpi'] \\ & + M^{(3)} \cos\,[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 2\varpi'] \\ & + M^{(4)} \cos\,[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 2nt + 2\epsilon - 3\varpi' + \varpi],\end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = +\frac{m'e^3e'}{96}\cdot\left\{\begin{aligned} & [16(i+1)^4 - 68(i+1)^3 + 82(i+1)^2 - 26(i+1)]\,A^{(i+1)} \\ & + [16(i+1)^3 - 48(i+1)^2 + 46(i+1) - 18]\,a\,\frac{dA^{(i+1)}}{da} \\ & - [3(i+1) - 9]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} \\ & - [4(i+1) - 2]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3} - a^4\,\frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}, \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(1)} = \left\{\begin{aligned} & +\frac{m'e^2e'^2}{32}\cdot\left\{\begin{aligned} & [-16i^4 + 20i^3]\,A^{(i)} - (16i^3 - 16i^2 + 2i + 4)\,a\,\frac{dA^{(i)}}{da} \\ & + (11i - 2)\,a^2\,\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + (4i + 4)\,a^3\,\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4\,\frac{d^4A^{(i)}}{da^4} \end{aligned}\right\} \\ & + \frac{m'e^4}{96}\cdot\left\{\begin{aligned} & [-16i^4 + 60i^3 - 64i^2 + 22i]\,A^{(i)} \\ & + [-16i^3 + 48i^2 - 46i + 16]\,a\,\frac{dA^{(i)}}{da} \\ & + (9i - 12)\,a^2\,\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} + 4ia^3\,\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} + a^4\,\frac{d^4A^{(i)}}{da^4}, \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(2)} = \left\{\begin{aligned} & +\frac{m'e^3e'}{32}\cdot\left\{\begin{aligned} & [16(i-1)^4 - 12(i-1)^3 - 6(i-1)^2 + 2(i-1)]\,A^{(i-1)} \\ & + [16(i-1)^3 - 16(i-1)^2 - 6(i-1) + 6]\,a\,\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\ & - [17(i-1) + 3]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\ & - [4(i-1) + 6]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} - a^4\,\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} \end{aligned}\right\} \\ & + \frac{m'ee'^3}{32}\cdot\left\{\begin{aligned} & [16(i-1)^4 + 28(i-1)^3 + 10(i-1)^2 + 2(i-1)]\,A^{(i-1)} \\ & + [16(i-1)^3 + 16(i-1)^2 - 10(i-1) - 6]\,a\,\frac{dA^{(i-1)}}{da} \\ & - [19(i-1) + 21]\,a^2\,\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\ & - [4(i-1) + 10]\,a^3\,\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} - a^4\,\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4}, \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\}$$

$$M^{(3)} = \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{m'e^2e'^2}{32} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - [16(i-2)^4 + 36(i-2)^3 + 16(i-2)^2]\, A^{(i-2)} \\ - [16(i-2)^3 + 16(i-2)^2 - 26(i-2) - 20]\, a \dfrac{dA^{(i-2)}}{da} \\ + [25(i-2) + 34]\, a^2 \dfrac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\ + [4(i-2) + 12]\, a^2 \dfrac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} + a^4 \dfrac{d^4A^{(i-2)}}{da^4} \end{array} \right. \\ + \dfrac{m'e'^4}{96} \cdot \left\{ \begin{array}{l} - [16(i-2)^4 + 76(i-2)^3 + 112(i-2)^2 + 62(i-2) + 16]\, A^{(i-2)} \\ - [16(i-2)^3 + 48(i-2)^2 + 10(i-2) - 32]\, a \dfrac{dA^{(i-2)}}{da} \\ + [27(i-2) + 60]\, a^2 \dfrac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\ + [4(i-2) + 16]\, a^3 \dfrac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} + a^4 \dfrac{d^4A^{(i-2)}}{da^4}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$M^{(4)} = + \frac{m'ee'^3}{96} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + [16(i-3)^4 + 84(i-3)^3 + 130(i-3)^2 + 54(i-3)]\, A^{(i-3)} \\ + [16(i-3)^3 + 48(i-3)^2 - 14(i-3) - 78]\, a \dfrac{dA^{(i-3)}}{da} \\ - [33(i-3) + 81]\, a^2 \dfrac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\ - [4(i-3) + 18]\, a^3 \dfrac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} - a^4 \dfrac{d^4A^{(i-3)}}{da^4}. \end{array} \right.$$

Termes du cinquième ordre qui ont même argument que ceux du premier ordre.

15. Soit

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + 2\varpi' - 3\varpi] \\ & + M^{(1)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi' - 2\varpi] \\ & + M^{(2)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \\ & + M^{(3)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'] \\ & + M^{(4)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - 2\varpi' + \varpi] \\ & + M^{(5)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - 3\varpi' + 2\varpi], \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = + \frac{m'e^3e'^2}{384} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} - 32(i+2)^5 + 192(i+2)^4 - 406(i+2)^3 \\ + 354(i+2)^2 - 104(i+2) \end{array} \right\} A^{(i+2)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} - 16(i+2)^4 + 96(i+2)^3 - 79(i+2)^2 \\ + 129(i+2) - 90 \end{array} \right\} a \dfrac{dA^{(i+2)}}{da} \\ + [16(i+2)^3 + 96(i+2)^2 - 344(i+2) + 36]\, a^2 \dfrac{d^2A^{(i+2)}}{da^2} \\ + [32(i+2)^2 - 96(i+2) + 23]\, a^3 \dfrac{d^3A^{(i+2)}}{da^3} \\ - [2(i+2) + 6]\, a^4 \dfrac{d^4A^{(i+2)}}{da^4} - a^5 \dfrac{d^5A^{(i+2)}}{da^5}, \end{array} \right.$$

$$
M^{(1)} = \left\{
\begin{aligned}
&+\frac{m'e^4e'}{192}\cdot\left(
\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}&16(i+1)^5-136(i+1)^4+188(i+1)^3\\&-108(i+1)^2+22(i+1)\end{aligned}\right\}A^{(i+1)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&16(i+1)^4-68(i+1)^3+124(i+1)^2\\&-102(i+1)+32\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i+1)}}{da}\\
&+[-16(i+1)^3+30(i+1)^2+5(i+1)-20]\,a^2\frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2}\\
&+[-8(i+1)^2+25(i+1)-12]\,a^3\frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3}\\
&+[2(i+1)+5]\,a^4\frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i+1)}}{da^5}
\end{aligned}\right)\\
&+\frac{m'e'^3e^2}{384}\cdot\left(
\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}&96(i+1)^5-288(i+1)^4+270(i+1)^3\\&-87(i+1)^2+15(i+1)\end{aligned}\right\}A^{(i+1)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&48(i+1)^4-216(i+1)^3+255(i+1)^2\\&+87(i+1)-32\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i+1)}}{da}\\
&+[-48(i+1)^3+12(i+1)^2+246(i+1)-225]\,a^2\frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2}\\
&+[-24(i+1)^2+90(i+1)-177]\,a^3\frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3}\\
&+[+6(i+1)-42]\,a^4\frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}+3a^5\frac{d^5A^{(i+1)}}{da^5},
\end{aligned}\right)
\end{aligned}\right.
$$

$$
M^{(2)} = \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{m'e^5}{384}\cdot\left\{
\begin{aligned}
&[32i^5-80i^4+26i^3+12i^2+10i]\,A^{(i)}\\
&+[16i^4+40i^3+37i^2-18i+5]\,a\frac{dA^{(i)}}{da}\\
&+[-16i^3+12i^2+8i-4]\,a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\\
&+[-8i^2-14i-6]\,a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\\
&+[2i+4]\,a^4\frac{d^4A^{(i)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i)}}{da^5}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{m'e^3e'^2}{64}\cdot\left\{
\begin{aligned}
&[-32i^5+40i^4+8i^3]\,A^{(i)}\\
&+[-16i^4+44i^3-24i^2-10i+6]\,a\frac{dA^{(i)}}{da}\\
&+[16i^3+14i^2-38i]\,a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\\
&+[8i^2-19i-21]\,a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\\
&+[-2i-10]\,a^4\frac{d^4A^{(i)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i)}}{da^5}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{m'ee'^4}{128}\cdot\left\{
\begin{aligned}
&[-32i^5+34i^3]\,A^{(i)}\\
&+[-16i^4+48i^3+41i^2-48i-120]\,a\frac{dA^{(i)}}{da}\\
&+[16i^3+40i^2-72i-240]\,a^2\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\\
&+[8i^2-24i-120]\,a^3\frac{d^3A^{(i)}}{da^3}\\
&+[-2i-20]\,a^4\frac{d^4A^{(i)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i)}}{da^5},
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.
$$

$$M^{(3)} = \left\{ \begin{aligned}
&+\frac{m'e'^5}{384}\cdot\left\{ \begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}&+32(i-1)^5+96(i-1)^4+46(i-1)^3\\&-47(i-1)^2-176(i-1)+1\end{aligned}\right\}A^{(i-1)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&16(i-1)^4+104(i-1)^3-155(i-1)^2\\&-494(i-1)+133\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i-1)}}{da}\\
&+[-16(i-1)^3-84(i-1)^2-278(i-1)+262]a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\\
&+[-8(i-1)^2-46(i-1)+130]a^3\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}\\
&+[-2(i-1)+21]a^4\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{m'e^2e'^3}{64}\cdot\left\{ \begin{aligned}
&[+32(i-1)^5+56(i-1)^4-20(i-1)^3+4(i-1)^2]A^{(i-1)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&16(i-1)^4+20(i-1)^3-64(i-1)^2\\&+8(i-1)+12\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i-1)}}{da}\\
&+[-16(i-1)^3-58(i-1)^2+11(i-1)+69]a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\\
&+[-8(i-1)^2-13(i-1)+61]a^3\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}\\
&+[-2(i-1)+15]a^4\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{m'e^4e'}{128}\cdot\left\{ \begin{aligned}
&[-32(i-1)^5+16(i-1)^4+18(i-1)^3-9(i-1)^2]A^{(i-1)}\\
&+[16(i-1)^4+16(i-1)^3-25(i-1)^2]a\frac{dA^{(i-1)}}{da}\\
&+[-16(i-1)^3-32(i-1)^2]a^2\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\\
&+[-8(i-1)^2-8(i-1)]a^3\frac{d^3A^{(i-1)}}{da^3}\\
&+[-2(i-1)+5]a^4\frac{d^4A^{(i-1)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i-1)}}{da^5},
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}$$

$$M^{(4)} = \left\{ \begin{aligned}
&+\frac{m'ee'^4}{192}\cdot\left\{ \begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}&-16(i-2)^5-152(i-2)^4-224(i-2)^3\\&-124(i-2)^2-32(i-2)\end{aligned}\right\}A^{(i-2)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&-16(i-2)^4-4(i-2)^3+140(i-2)^2\\&+136(i-2)-16\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i-2)}}{da}\\
&+[16(i-2)^3+102(i-2)^2+76(i-2)-152]a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2}\\
&+[8(i-2)^2-7(i-2)-108]a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3}\\
&+[-2(i-2)-20]a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5}
\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{m'e^3e'^2}{384}\cdot\left\{ \begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}&-95(i-2)^5-336(i-2)^4-390(i-2)^3\\&-174(i-2)^2-241(i-2)\end{aligned}\right\}A^{(i-2)}\\
&+\left\{\begin{aligned}&-48(i-2)^4-24(i-2)^3+225(i-2)^2\\&+147(i-2)+90\end{aligned}\right\}a\frac{dA^{(i-2)}}{da}\\
&+[48(i-2)^3+228(i-2)^2-498(i-2)+144]a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2}\\
&+[24(i-2)^2-6(i-2)+105]a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3}\\
&+[-6(i-2)+33]a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4}+3a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5},
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}$$

$$M^{(5)} = \frac{me^2e'^3}{384}\cdot\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 32(i-3)^5+208(i-3)^4+470(i-3)^3 \\ +433(i-3)^2+135(i-3) \end{array}\right\} A^{(i-3)} \\ +\left\{\begin{array}{l} 16(i-3)^4+32(i-3)^3-113(i-3)^2 \\ -289(i-3)-156 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\ +[-16(i-3)^3-192(i-3)^2-376(i-3)-3]\,a^2\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\ +[-32(i-3)^2-64(i-3)+81]\,a^3\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\ +[\ 2(i-3)+79]\,a^4\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5}. \end{array}\right\}$$

Termes du cinquième ordre qui ont mêmes argumens que ceux du troisième ordre.

16. Soit

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon+\varpi'-4\varpi] \\ & + M^{(1)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-3\varpi] \\ & + M^{(2)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi'-2\varpi] \\ & + M^{(3)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-2\varpi'-\varpi] \\ & + M^{(4)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-3\varpi'] \\ & + M^{(5)} \cos [i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-4\varpi'+\varpi]. \end{aligned}$$

on aura

$$M^{(0)} = \frac{m'e^4e'}{768}\cdot\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -32(i+1)^5+256(i+1)^4-686(i+1)^3 \\ +695(i+1)^2-206(i+1) \end{array}\right\} A^{(i+1)} \\ +\left\{\begin{array}{l} -48(i+1)^4+280(i+1)^3-525(i+1)^2 \\ +394(i+1)-128 \end{array}\right\} a\frac{dA^{(i+1)}}{da} \\ +[-16(i+1)^3+60(i+1)^2-94(i+1)+80]\,a^2\frac{d^2A^{(i+1)}}{da^2} \\ +[+8(i+1)^2-22(i+1)]\,a^3\frac{d^3A^{(i+1)}}{da^3} \\ +[+6(i+1)-7]\,a^4\frac{d^4A^{(i+1)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i+1)}}{da^5}, \end{array}\right\}$$

$$
M^{(1)} = \left\{
\begin{array}{l}
-\dfrac{m'e^5}{768} \cdot \left\{
\begin{array}{l}
\left[-32i^5+240i^4-614i^3+648i^2-258i\right]A^{(i)} \\
+\left[-48i^4+280i^3-549i^2+460i-135\right] a \dfrac{dA^{(i)}}{da} \\
+\left[-16i^3+84i^2-160i+108\right] a^2 \dfrac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\
+\left[8i^2-6i-18\right] a^3 \dfrac{d^3A^{(i)}}{da^3} \\
+\left[6i-4\right] a^4 \dfrac{d^4A^{(i)}}{da^4} + a^5 \dfrac{d^5A^{(i)}}{da^5},
\end{array}
\right\} \\[2em]
+\dfrac{m'e^3e'^2}{192} \cdot \left\{
\begin{array}{l}
\left[32i^5-120i^4+104i^3\right]A^{(i)} \\
+\left[48i^4-108i^3+36i^2\right] a \dfrac{dA^{(i)}}{da} \\
+\left[16i^3-42i^2+46i\right] a^2 \dfrac{d^2A^{(i)}}{da^2} \\
+\left[-8i^2-9i+15\right] a^3 \dfrac{d^3A^{(i)}}{da^3} \\
+\left[-6i-2\right] a^4 \dfrac{d^4A^{(i)}}{da^4} - a^5 \dfrac{d^5A^{(i)}}{da^5},
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right.
$$

$$
M^{(2)} = \left\{
\begin{array}{l}
+\dfrac{m'e^4e'}{192} \cdot \left\{
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}-32(i-1)^5+104(i-1)^4-68(i-1)^3 \\ -20(i-1)^2+22(i-1)\end{array}\right\} A^{(i-1)} \\
+\left\{\begin{array}{l}-48(i-1)^4+124(i-1)^3-60(i-1)^2 \\ -38(i-1)+32\end{array}\right\} a \dfrac{dA^{(i-1)}}{da} \\
+\left[-16(i-1)^3+66(i-1)^2-43(i-1)-20\right] a^2 \dfrac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\
+\left[8(i-1)^2+25(i-1)-12\right] a^3 \dfrac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} \\
+\left[6(i-1)+5\right] a^4 \dfrac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} + a^6 \dfrac{d^5A^{(i-1)}}{da^6},
\end{array}
\right\} \\[2em]
+\dfrac{m'e^2e'^3}{128} \cdot \left\{
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}-32(i-1)^5-16(i-1)^4+50(i-1)^3 \\ +21(i-1)^2+5(i-1)\end{array}\right\} A^{(i-1)} \\
+\left\{\begin{array}{l}-48(i-1)^4-32(i-1)^3+43(i-1)^2 \\ -3(i-1)-12\end{array}\right\} a \dfrac{dA^{(i-1)}}{da} \\
+\left[-16(i-1)^3+24(i-1)^2+40(i-1)-15\right] a^2 \dfrac{d^2A^{(i-1)}}{da^2} \\
+\left[8(i-1)^2+40(i-1)+21\right] a^3 \dfrac{d^3A^{(i-1)}}{da^3} \\
+\left[6(i-1)+11\right] a^4 \dfrac{d^4A^{(i-1)}}{da^4} + a^5 \dfrac{d^5A^{(i-1)}}{da^5},
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right.
$$

$$M^{(3)} = \left\{ \begin{aligned} &+\frac{m'ee'^4}{192}\cdot\left(\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &32(i-2)^5+152(i-2)^4+224(i-2)^3 \\ &+124(i-2)^2+32(i-2) \end{aligned} \right\} A^{(i-2)} \\ &+\left\{ \begin{aligned} &48(i-2)^4+188(i-2)^3+252(i-2)^2 \\ &+146(i-2)+32 \end{aligned} \right\} a\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\ &+[16(i-2)^3-6(i-2)^2-164(i-2)-152]\,a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\ &+[-8(i-2)^2-71(i-2)-108]\,a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} \\ &+[-6(i-2)-20]\,a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5} \end{aligned} \right) \\ &+\frac{m'e^3e'^2}{128}\cdot\left(\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &+32(i-2)^5+32(i-2)^4-50(i-2)^3 \\ &-22(i-2)^2+8(i-2) \end{aligned} \right\} A^{(i-2)} \\ &+\left\{ \begin{aligned} &48(i-2)^4+32(i-2)^3-91(i-2)^2 \\ &-19(i-2)+30 \end{aligned} \right\} a\frac{dA^{(i-2)}}{da} \\ &+[16(i-2)^3-48(i-2)^2-112(i-2)-12]\,a^2\frac{d^2A^{(i-2)}}{da^2} \\ &+[-8(i-2)^2-56(i-2)-45]\,a^3\frac{d^3A^{(i-2)}}{da^3} \\ &+[-6(i-2)-14]\,a^4\frac{d^4A^{(i-2)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i-2)}}{da^5}, \end{aligned} \right) \end{aligned} \right.$$

$$M^{(4)} = \left\{ \begin{aligned} &-\frac{m'e'^5}{768}\cdot\left(\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &32(i-3)^5+288(i-3)^4+926(i-3)^3 \\ &+1317(i-3)^2+858(i-3)+243 \end{aligned} \right\} A^{(i-3)} \\ &+\left\{ \begin{aligned} &48(i-3)^4+344(i-3)^3+741(i-3)^2 \\ &+416(i-3)-93 \end{aligned} \right\} a\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\ &+[16(i-3)^3+12(i-3)^2-326(i-3)-618]\,a^2\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\ &+[-8(i-3)^2-102(i-3)-246]\,a^3\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\ &+[-6(i-3)-29]\,a^4\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4}-a^5\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5} \end{aligned} \right) \\ &+\frac{m'e^2e'^3}{192}\cdot\left(\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &-32(i-3)^5-168(i-3)^4-260(i-3)^3 \\ &-108(i-3)^2 \end{aligned} \right\} A^{(i-3)} \\ &+\left\{ \begin{aligned} &-48(i-3)^4-188(i-3)^3-96(i-3)^2 \\ &+232(i-3)+156 \end{aligned} \right\} a\frac{dA^{(i-3)}}{da} \\ &+[-16(i-3)^3+30(i-3)^2+305(i-3)+321]\,a^2\frac{d^2A^{(i-3)}}{da^2} \\ &+[8(i-3)^2+87(i-3)+153]\,a^3\frac{d^3A^{(i-3)}}{da^3} \\ &+[6(i-3)+23]\,a^4\frac{d^4A^{(i-3)}}{da^4}+a^5\frac{d^5A^{(i-3)}}{da^5}, \end{aligned} \right) \end{aligned} \right.$$

$$M^{(5)} = \frac{m'e'^4e}{768} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 32(i-4)^5+304(i-4)^4+998(i-4)^3 \\ +1292(i-4)^2+512(i-4) \end{array} \right\} A^{(i-4)} \\ + \left\{ \begin{array}{l} 48(i-4)^4+344(i-4)^3+621(i-4)^2 \\ -202(i-4)-824 \end{array} \right\} a \cdot \frac{dA^{(i-4)}}{da} \\ +[\ 16(i-4)^3 - 12(i-4)^2 - 536(i-4) - 1024]\, a^2 \frac{d^2A^{(i-4)}}{da^2} \\ +[-8(i-4)^2 - 118(i-4) - 312]\, a^3 \frac{d^3A^{(i-4)}}{da^3} \\ +[-6(i-4) - 32]\, a^4 \frac{d^4A^{(i-4)}}{da^4} - a^5 \frac{d^5A^{(i-4)}}{da^5}. \end{array} \right\}$$

En n'ayant égard qu'aux termes dépendans du carré des inclinaisons, on a n° 3

$$R = -\frac{m'aa'}{8}\lambda^2\Sigma B^{(i-1)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$+ \frac{m'aa'}{8}\lambda^2\Sigma B^{(i-1)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi].$$

Le premier de ces termes peut s'écrire ainsi

$$-\frac{\lambda^2}{8} \cdot \frac{m'}{2} aa'\Sigma\,(B^{(i-1)} + B^{(i+1)}) \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

i étant susceptible de toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro.

Si l'on compare cette expression à la fonction $\frac{m'}{2}\Sigma A^{(i)} \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, et qu'en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, on suppose

$$\begin{aligned} R = {} & N^{(0)}e^3\lambda^2 \cos [i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 3\varpi] \\ & + N^{(1)}e^2e'\lambda^2 \cos [i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 2\varpi - \varpi'] \\ & + N^{(2)}ee'^2\lambda^2 \cos [i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi - 2\varpi'] \\ & + N^{(3)}e'^3\lambda^2 \cos [i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 3\varpi']. \end{aligned}$$

on verra que pour obtenir les valeurs des quantités $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, il suffit de substituer $B^{(i-1)}+B^{(i+1)}$ à la place de $A^{(i)}$ dans les valeurs des quantités $M^{(0)}$,

$M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, du n° 7, après les avoir multipliées respectivement par $-\frac{1}{8}$. On trouve ainsi

$$N^{(0)} = +\frac{m'aa'}{384}\cdot\left\{\begin{array}{l}(8i^3 - 18i^2 - i + 9)\,(B^{(i-1)} + B^{(i+1)}) \\ +(12i^2 - 15i - 3)\left(a\frac{dB^{(i-1)}}{da} + a\frac{dB^{(i+1)}}{da}\right) \\ +(6i - 3)\left(a^2\frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2} + a^2\frac{d^2B^{(i+1)}}{da^2}\right) \\ +\left(a^3\frac{d^3B^{(i-1)}}{da^3} + a^3\frac{d^3B^{(i+1)}}{da^3}\right),\end{array}\right\}$$

$$N^{(1)} = -\frac{m'aa'}{128}\cdot\left\{\begin{array}{l}[8(i-1)^3 + 6(i-1)^2 - 6(i-1) - 4]\,(B^{(i-2)} + B^{(i)}) \\ +[12(i-1)^2 - 11(i-1) - 2]\left(a\frac{dB^{(i-2)}}{da} + a\frac{dB^{(i)}}{da}\right) \\ +[6(i-1) + 4]\left(a^2\frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2} + a^2\frac{d^2B^{(i)}}{da^2}\right) \\ +\left(a^3\frac{d^3B^{(i-2)}}{da^3} + a^3\frac{d^3B^{(i)}}{da^3}\right),\end{array}\right\}$$

$$N^{(2)} = +\frac{m'aa'}{128}\cdot\left\{\begin{array}{l}[8(i-2)^3 + 30(i-2)^2 + 33(i-2) + 10]\,(B^{(i-3)} + B^{(i-1)}) \\ +[12(i-2)^2 + 37(i-2) + 26]\left(a\frac{dB^{(i-3)}}{da} + a\frac{dB^{(i-1)}}{da}\right) \\ +[6(i-2) + 11]\left(a^2\frac{d^2B^{(i-3)}}{da^2} + a^2\frac{d^2B^{(i-1)}}{da^2}\right) \\ +\left(a^3\frac{d^3B^{(i-3)}}{da^3} + a^3\frac{d^3B^{(i-1)}}{da^3}\right),\end{array}\right\}$$

$$N^{(3)} = -\frac{m'aa'}{384}\cdot\left\{\begin{array}{l}[8(i-3)^3 + 54(i-3)^2 + 116(i-3) + 78]\,(B^{(i-4)} + B^{(i-2)}) \\ +[12(i-3)^2 + 63(i-3) + 81]\left(a\frac{dB^{(i-4)}}{da} + a\frac{dB^{(i-2)}}{da}\right) \\ +[6(i-3) + 18]\left(a^2\frac{d^2B^{(i-4)}}{da^2} + a^2\frac{d^2B^{(i-2)}}{da^2}\right) \\ +\left(a^3\frac{d^3B^{(i-4)}}{da^3} + a^3\frac{d^3B^{(i-2)}}{da^3}\right).\end{array}\right\}$$

La partie

$$+\frac{m'aa'}{8}\lambda^2\Sigma B^{(i-1)}\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\Pi]$$

de la fonction R peut se développer d'après ce qui a été dit n° 7; et si en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons on suppose

$$
\begin{aligned}
R = N^{(4)} \cos & [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 2\varpi + \varpi' - 2\Pi] \\
+ N^{(5)} \cos & [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi - 2\Pi] \\
+ N^{(6)} \cos & [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi' - 2\Pi] \\
+ N^{(7)} \cos & [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - 2\varpi' + \varpi - 2\Pi],
\end{aligned}
$$

on trouvera

$$
N^{(4)} = -m'aa'\frac{e^2e'\lambda^2}{128}.\left\{\begin{array}{l}
[8(i+1)^3 - 42(i+1)^2 + 66(i+1) - 32]\,B^{(i)} \\
+ [4(i+1)^2 - 11(i+1) + 8]\,a\dfrac{dB^{(i)}}{da} \\
- [2(i+1) - 4]\,a\dfrac{dB^{(i)}}{da} - a\dfrac{dB^{(i)}}{da},
\end{array}\right\}
$$

$$
N^{(5)} = +m'aa'.\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{e^3\lambda^2}{128}\left\{\begin{array}{l}
(8i^3 - 54i^2 + 115i - 75)\,B^{(i-1)} \\
+ (4i^2 - 27i + 37)\,a\dfrac{dB^{(i-1)}}{da} \\
- (2i + 1)\,a^2\dfrac{d^2B^{(i-1)}}{da^2} - a^3\dfrac{d^3B^{(i-1)}}{da^3}
\end{array}\right\} \\
+\dfrac{ee'^2\lambda^2}{64}\left\{\begin{array}{l}
(8i^3 - 12i^2 - 4i + 6)\,B^{(i-1)} \\
+ (4i^2 - 8i + 6)\,a\dfrac{dB^{(i-1)}}{da} \\
- (2i + 3)\,a^2\dfrac{d^2B^{(i-1)}}{da^2} - a^3\dfrac{d^3B^{(i-1)}}{da^3},
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$
N^{(6)} = -m'aa'.\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{e'^3\lambda^2}{128}\left\{\begin{array}{l}
[8(i-1)^3 + 18(i-1)^2 + 4(i-1) - 6]\,B^{(i-2)} \\
+ [4(i-1)^2 - 5(i-1) - 21]\,a\dfrac{dB^{(i-2)}}{da} \\
- [2(i-1) + 10]\,a^2\dfrac{d^2B^{(i-2)}}{da^2} - a^3\dfrac{d^3B^{(i-2)}}{da^3}
\end{array}\right\} \\
+\dfrac{e^2e'\lambda^2}{64}\left\{\begin{array}{l}
[8(i-1)^3 - 24(i-1)^2 - 4(i-1) + 28]\,B^{(i-2)} \\
+ [4(i-1)^2 - 24(i-1) + 2]\,a\dfrac{dB^{(i-2)}}{da} \\
- [2(i-1) + 8]\,a^2\dfrac{d^2B^{(i-2)}}{da^2} - a^3\dfrac{d^3B^{(i-2)}}{da^3},
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
$$

$$
N^{(7)} = +m'aa'.\frac{ee'^2\lambda^2}{128}\left\{\begin{array}{l}
[8(i-2)^3 + 6(i-2)^2 - 45(i-2) - 50]\,B^{(i-3)} \\
+ [4(i-2) - 21(i-2) - 58]\,a\dfrac{dB^{(i-3)}}{da} \\
- [2(i-2) + 15]\,a^2\dfrac{d^2B^{(i-3)}}{da^2} - a^3\dfrac{d^3B^{(i-3)}}{da^3}.
\end{array}\right\}
$$

En n'ayant égard parmi les termes dépendans de la quatrième puissance des inclinaisons qu'à ceux qui peuvent donner par leur développement des termes

de l'espèce de ceux dont nous nous occupons, on a

$$R = +\frac{3m'a^2a'^2}{128}\lambda^4\Sigma C^{(i-2)}\cos\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 4nt + 4\epsilon - 4\Pi\right].$$

Cette fonction étant développée, en s'arrêtant aux premières puissances des excentricités, donnera

$$\begin{aligned} R = {} & N^{(8)}\cos\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon + \varpi - 4\Pi\right] \\ & + N^{(9)}\cos\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + 3nt + 3\epsilon + \varpi' - 4\Pi\right], \end{aligned}$$

en supposant

$$N^{(8)} = \frac{3m'a^2a'^2}{256}e\lambda^4\left[2(i-5)C^{(i-2)} - a\frac{dC^{(i-2)}}{da}\right],$$

$$N^{(9)} = -\frac{3m'a^2a'^2}{256}e'\lambda^4\left[[2(i+1)-3]C^{(i-1)} - a\frac{dC^{(i-1)}}{da}\right].$$

En réunissant les parties de la valeur de R que nous venons de déterminer à celles qui dépendent simplement des excentricités, on aura tous les termes de cette fonction du cinquième ordre par rapport aux excentricités, et qui ont la même forme que les termes dépendans des troisièmes puissances de ces deux élémens. Nous avons développé ces termes dans toute leur étendue, à cause de leur utilité dans la théorie de Jupiter et Saturne.

Dans toutes les formules précédentes la lettre i doit s'étendre à toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro; en rassemblant ensuite les différentes parties que nous venons de calculer, on aura l'expression du développement de la fonction R porté jusqu'aux termes du sixième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons des orbites des deux planètes m et m' dont on a considéré l'action réciproque.

17. Nous nous sommes étendu sur le développement de la fonction R en série, parce qu'une fois que ce développement est effectué, la détermination des inégalités planétaires ne présente plus guère d'autres difficultés que celles qui résultent de la longueur des calculs. En effet, par la seule différentiation des différens termes de ce développement on obtiendra le terme correspondant de chacun des élémens de l'orbite de m ; et en substituant ensuite ces élémens dans les formules du mouvement elliptique on obtiendra des formules qui s'appliqueront au mouvement troublé. On aura donc ainsi un procédé simple et direct pour déterminer dans chaque cas toutes les inégalités sensibles d'une planète, de quelque ordre qu'elles puissent être relativement aux excentricités et aux inclinaisons.

Soit par exemple

$$m'k \cos\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + lnt + l\epsilon - f\varpi - f'\varpi' - 2f''\Pi\right]$$

l'un quelconque des termes du développement de R, le terme correspondant de la variation du grand axe sera

$$\frac{2m'a^2n(i-l)}{i(n'-n)+ln}\, k \cos\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + lnt + l\epsilon - f\varpi - f'\varpi' - 2f''\Pi\right],$$

le terme correspondant du mouvement moyen sera

$$-\frac{3m'an^2(i-l)^2}{[i(n'-n)+ln]^2}\, k \sin\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + lnt + l\epsilon - f\varpi - f'\varpi' - 2f''\Pi\right];$$

le terme correspondant de l'époque,

$$-\frac{m'an}{i(n'-n)+ln}\left[\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dk}{de}\right) - 2a^2\frac{dk}{da}\right]$$
$$\sin\left[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + lnt + l\epsilon - f\varpi - f'\varpi' - 2f''\Pi\right];$$

le terme correspondant de l'excentricité sera

$$-\frac{m'an\sqrt{1-e^2}\,[f+(i-l)(1-\sqrt{1-e^2})]}{e[i(n'-n)+ln]}\,k$$
$$\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi],$$

et le terme correspondant de la longitude du périhélie,

$$-\frac{m'an\sqrt{1-e^2}}{e[i(n'-n)+ln]}\cdot\frac{dk}{de}\cdot\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi].$$

Enfin, en vertu des formules données n° 4, le terme correspondant de p sera

$$\frac{m'an\sin\gamma}{\lambda\sqrt{1-e^2}[i(n'-n)+ln]}\cdot\frac{dk}{d\lambda}\cdot\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi],$$

et le terme correspondant de q,

$$\frac{2m'ank}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}\,[i(n'-n)+ln]}\left[f''+(i-l+f)\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\right]$$
$$\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi].$$

En substituant ces valeurs dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, relatives au mouvement elliptique de m, on aura les inégalités correspondantes introduites dans ces expressions par l'action de la planète perturbatrice m'.

La partie séculaire des variations des élémens du mouvement elliptique dépend de la partie constante de la fonction R que nous avons désignée par F dans le n° 46 du livre II, et dont nous avons donné l'expression développée jusqu'aux termes de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons. Il est facile, d'après ce qui précède, d'avoir l'expression de cette quantité exacte jusqu'aux termes

du quatrième ordre par rapport aux mêmes élémens. En effet, il suffira de faire $i=0$ dans l'expression du développement de R, et de n'avoir égard qu'aux termes non périodiques qui résulteront de cette supposition. Ces termes seront évidemment ceux qui proviennent, 1°. de la partie indépendante des excentricités et des inclinaisons, 2°. de la partie dépendante de la deuxième et de la quatrième puissance de ces mêmes quantités, qui a mêmes argumens que les termes indépendans des excentricités et des inclinaisons. On aura ainsi

$$
\begin{aligned}
F = {} & \frac{m'}{2}A^{(0)} + \frac{m'(e^2+e'^2)}{4}\left(a\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{1}{2}a^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) + \frac{e^4}{32}\left(a^3\frac{d^3A^{(0)}}{da^3} + \frac{1}{4}a^4\frac{d^4A^{(0)}}{da^4}\right) \\
& + \frac{me'^4}{32}\left(6a\frac{dA^{(0)}}{da} + 9a^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2} + 3a^3\frac{d^3A^{(0)}}{da^3} + \frac{1}{4}a^4\frac{d^4A^{(0)}}{da^4}\right) \\
& + \frac{m'e^2e'^2}{8}\left(a\frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{7}{2}a^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2} + 2a^3\frac{d^3A^{(0)}}{da^3} + \frac{1}{4}a^4\frac{d^4A^{(0)}}{da^4}\right) \\
& - \frac{m'aa'\lambda^2}{8}\left[B^{(1)} + \frac{e^2+e'^2}{2}\left(B^{(1)} + 2a\frac{dB^{(1)}}{da} + \frac{1}{2}a^2\frac{d^2B^{(1)}}{da^2}\right)\right] \\
& + \frac{3m'a^2a'^2\lambda^4}{64}\left(C^{(0)} + \frac{1}{2}C^{(2)}\right) \\
& + m'ee'\cos(\varpi'-\varpi)\left\{
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(A^{(1)} - a\frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{1}{2}a^2\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right) \\
& - \frac{e^2}{32}\left(4a^2\frac{d^2A^{(1)}}{da^2} + 6a^3\frac{d^3A^{(1)}}{da^3} + a^4\frac{d^4A^{(1)}}{da^4}\right) \\
& - \frac{e'^2}{32}\left(-4A^{(1)} + 4a\frac{dA^{(1)}}{da} + 22a^2\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + 10a^3\frac{d^3A^{(1)}}{da^3} + a^4\frac{d^4A^{(1)}}{da^4}\right) \\
& + \frac{a'a\lambda^2}{8}\left(a\frac{dB^{(0)}}{da} + \frac{1}{4}a^2\frac{d^2B^{(0)}}{da^2} + a\frac{dB^{(2)}}{da}\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}a^2\frac{d^2B^{(2)}}{da^2}\right)
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{m'}{64}.e^2e'^2\cos 2(\varpi'-\varpi).\left(12A^{(2)}-12a\frac{dA^{(2)}}{da}+6a^2\frac{d^2A^{(2)}}{da^2}+8a^3\frac{d^3A^{(2)}}{da^3}\right.$$
$$\left.+a^4\frac{d^4A^{(2)}}{da^4}\right)$$
$$+\frac{m'aa'}{64}.e^2\lambda^2\cos 2(\varpi-\Pi).\left(12B^{(1)}+8a\frac{dB^{(1)}}{da}+a^2\frac{d^2B^{(1)}}{da^2}\right)$$
$$+\frac{m'aa'}{64}.e'^2\lambda^2\cos 2(\varpi'-\Pi)\left(a^2\frac{dB^{(1)}}{da^2}\right)$$
$$-\frac{m'aa'}{32}.ee'\lambda^2\cos(\varpi+\varpi'-\Pi)\left(4a\frac{dB^{(0)}}{da}+a^2\frac{d^2B^{(0)}}{da^2}\right).$$

La quantité mF doit être la même pour la planète m et la planète m', puisque, d'après ce que nous avons vu n° 60, la dernière portion de la fonction

$$\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$$

ne produit aucun terme constant dans la fonction R. Il est facile de s'assurer, en effet, que la fonction mF satisfait à cette condition, et qu'elle demeurera la même lorsqu'on y changera tout ce qui se rapporte à m en ce qui se rapporte à m', et réciproquement.

La valeur précédente de F est celle qu'il faudra substituer dans les formules du n° 46 du livre II, pour avoir les expressions des variations séculaires des élémens de l'orbite elliptique, étendues jusqu'aux quatrièmes puissances des excentricités et des inclinaisons.

CHAPITRE II.

Formules générales pour le calcul numérique des différens termes du développement en série de la fonction perturbatrice.

18. Nous nous proposons d'ajouter ici quelques nouveaux développemens à ce que nous avons dit dans les nos 49 et suivans du livre II, sur la manière de déterminer les diverses quantités qui entrent dans l'expression des coefficiens de la fonction R réduite en série. Ces considérations seront utiles à ceux qui voudront s'occuper du calcul numérique de ces coefficiens.

Reprenons la fonction $(a'^2 - 2aa'\cos\varphi + a^2)^{-s}$ du numéro cité, où a et a' sont deux constantes, et s un nombre fractionnaire positif ou négatif. Nous ne traiterons pas ici le cas où s serait un nombre entier quelconque, parce qu'il n'a pas trouvé jusqu'à présent d'application dans la théorie du système du monde. Supposons $a' > a$, et faisons $\frac{a}{a'} = \alpha$, en sorte qu'on ait $\alpha < 1$; et pour plus de simplicité considérons la fonction $(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-s}$, qu'il s'agit de réduire en série ordonnée suivant les cosinus de l'angle φ et de ses multiples. Le moyen le

plus simple de résoudre les questions de ce genre est celui des coefficiens indéterminés. Cette méthode consiste à représenter la fonction qu'on veut développer, quelle qu'elle soit, par une série indéfinie dont les coefficiens sont indéterminés; en substituant ensuite cette série dans une équation différentielle, ou en quantités finies, tirée des propriétés de la fonction donnée, et en comparant dans chaque membre de l'équation résultante les coefficiens des mêmes cosinus, on forme un nombre d'équations de condition suffisant pour déterminer un pareil nombre de coefficiens inconnus.

Ce moyen très simple fait connaître les relations qui lient entre eux les divers coefficiens de la série, c'est celui dont nous avons usé dans le n° 49 du livre II; mais il en est un autre dont les géomètres font un fréquent usage pour la réduction en série de toute espèce de fonctions, et qu'il est d'autant plus utile d'indiquer ici, que ce procédé peut s'étendre à des questions plus importantes, et devenir d'une application très avantageuse à la théorie des perturbations planétaires.

Faisons pour abréger $S = (1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)$ et suivant la notation usitée, soit :

$$S^{-s} = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos \varphi + b_s^{(2)} \cos 2\varphi \ldots\ldots + b_s^{(i)} \cos i\varphi + \text{etc.}$$

Il s'agit de déterminer les différens coefficiens $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, etc. Or chacun de ces coefficiens peut s'exprimer d'une manière très simple par le moyen d'une intégrale définie, et on aura généralement :

$$b_s^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos i\varphi}{S^s}. \qquad (a)$$

L'intégrale étant prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, en désignant par π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

En effet, i et i' étant des nombres entiers quelconques, il est aisé de voir que l'intégrale $\int d\varphi \cos i\varphi \cos i'\varphi$, prise entre ces limites, se réduit à zéro pour toutes les valeurs de i' différentes de i, puisqu'on a

$$\int d\varphi \cos i\varphi \cos i'\varphi = \frac{1}{2}\int d\varphi . [\cos (i + i')\varphi + \cos (i' - i)\varphi],$$

et que $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos n\varphi = 0$, n étant un nombre entier quelconque différent de zéro. Si l'on multiplie donc par $\cos i\varphi \, d\varphi$ la fonction S^{-s} ou chacun des termes de la série qui la représente, et qu'on intègre l'équation résultante depuis $\varphi = o$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos i\varphi}{S^s} = \frac{1}{2} b_s^{(i)} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Tous les autres termes du second membre seront nuls, et son intégration étant effectuée, on trouvera pour déterminer $b_s^{(i)}$ la formule (a).

Cela posé d'après la valeur de S, il est aisé de voir que l'on a

$$\frac{i d\varphi \cos i\varphi}{S^s} = d.\frac{\sin i\varphi}{S^s} + \frac{2\alpha s \sin \varphi \sin i\varphi \, d\varphi}{S^{s+1}}, \qquad (b)$$

équation d'où l'on tire :

$$\frac{i d\varphi \cos i\varphi (1 + \alpha^2)}{S^s} = d.\frac{\sin i\varphi}{S^{s-1}} + \frac{2 i \alpha d\varphi \cos\varphi \cos i\varphi}{S^s} + \frac{2(s-1)\alpha \, d\varphi \sin\varphi \sin i\varphi}{S^s},$$

ou bien

$$\frac{i\,d\varphi \cos i\varphi (1+\alpha^2)}{S^s} = d.\frac{\sin i\varphi}{S^{s-1}} + \frac{\alpha(i+s-1)\cos(i-1)\varphi}{S^s} + \frac{\alpha(i-s+1)\cos(i+1)\varphi}{S^s}.$$

Si l'on intègre maintenant cette équation depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=2\pi$ et qu'on remarque que $\frac{\sin i\varphi}{S^{s-1}}$ est nul entre ces limites, on aura en vertu de l'équation (*a*)

$$(1+\alpha^2)\,i b_s^{(i)} = \alpha(i+s-1)b_s^{(i-1)} + \alpha(i-s+1)\,b_s^{(i+1)}, \quad (1)$$

Formule analogue à la formule (*a*) que nous avons obtenue d'une autre manière dans le n° 49 du livre I, et qui exprime la relation qui existe entre les trois coefficiens consécutifs de la série S^{-s}.

On peut, au moyen de cette formule, calculer un coefficient quelconque $b_s^{(i+1)}$ du développement de la fonction S^{-s} au moyen des deux coefficiens qui le précèdent $b_s^{(i)}$ et $b_s^{(i-1)}$, en sorte que le calcul de tous les termes est ainsi réduit à celui des deux premiers coefficiens $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$. Cependant, lorsque α est une quantité peu considérable, la formule précédente peut devenir défectueuse, parce qu'alors les coefficiens $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, etc., étant les différences de deux nombres qui diffèrent très peu entre eux, ne peuvent plus se calculer avec une exactitude suffisante par les tables de logarithmes ordinaires; l'erreur se multiplie dans le calcul des termes suivans, de manière que les résultats deviennent de plus en plus inexacts, et qu'on finit même par arriver à des différences négatives, tandis qu'au contraire tous les coefficiens $b_s^{(i)}$, $b_s^{(i+1)}$, etc., sont nécessairement positifs. Ce cas

se rencontre dans la théorie de Jupiter et de Mercure, dans celle de la Terre troublée par Vénus, et en général toutes les fois que α étant une petite quantité, on est obligé par quelque circonstance particulière de calculer les coefficiens $b_s^{(i)}$ d'un ordre un peu élevé. Il faut alors, pour déterminer chacun des coefficiens $b_s^{(i)}$, recourir au moyen des séries qui ont servi à déterminer les deux premiers coefficiens $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$. Ainsi, d'après le n° 50 du livre II, on aura ici

$$S^{-s}=\left(1-\alpha c^{\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-s}\left(1-\alpha c^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)^{-s}.$$

Si l'on développe les deux membres de cette équation, et qu'après avoir substitué 2 cos $i\varphi$ à la place de $c^{i\varphi\sqrt{-1}}+c^{-i\varphi\sqrt{-1}}$ dans le second membre, on compare les coefficiens des mêmes cosinus, on trouvera généralement

$$b_s^{(i)}=2\frac{s.s+1.s+2\ldots s+i-1}{1.2.3\ldots i}.\alpha^i.\left(1+\frac{s}{i}.\frac{s+i}{i+1}.\alpha^2+\frac{s.s+1}{1.2}.\frac{s+i}{i+1}.\frac{s+i+1}{i+2}\alpha^4+\text{etc}\right). \quad (m)$$

Cette série devient très convergente à cause de la petitesse de α, et l'on pourra se borner à en calculer quelques termes; elle fait voir que α étant nécessairement positif, les cofficiens $b_s^{(i)}$ seront aussi tous positifs. On pourra sans inconvénient se borner à calculer directement par ces séries les coefficiens alternatifs $b_s^{(0)}$, $b_s^{(2)}$, $b_s^{(4)}$, etc., et calculer les coefficiens intermédiaires par le moyen de la formule (1) qui devient alors d'un usage également sûr, soit que α diffère peu de l'unité, soit que ce soit une très petite quantité.

19. Considérons maintenant les formules qui servent à déduire les coefficiens du développement de S^{-s} en série de ceux de la série S^{-s-1}, et réciproquement. On a, par ce qui précède,

$$S^{-s} = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\varphi + b_s^{(2)} \cos 2\varphi \ldots + b_s^{(i)} \cos i\varphi + \text{etc.}$$

Supposons de même

$$S^{-s-1} = \frac{1}{2} b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)} \cos\varphi + b_{s+1}^{(2)} \cos 2\varphi \ldots + b_{s+1}^{(i)} \cos i\varphi + \text{etc.}$$

Par la formule (a) on aura

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos i\varphi}{S^{s+1}}. \qquad (c)$$

Or, l'équation (a) donne, en l'intégrant depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$ et en observant que $\frac{\sin i\varphi}{S^s}$ s'évanouit entre ces limites,

$$\int_0^{2\pi} \frac{i d\varphi \cos i\varphi}{S^s} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha s d\varphi \cos (i-1)\varphi}{S^{s+1}} - \int_0^{2\pi} \frac{\alpha s d\varphi \cos (i+1) d\varphi}{S^{s+1}};$$

on aura donc en vertu des formules (a) et (c)

$$b_s^{(i)} = \frac{\alpha s}{i} \left[b_{s+1}^{(i-1)} - b_{s+1}^{(i+1)} \right]. \qquad (2)$$

En faisant successivement $i = 1$, $i = 2$, etc., cette formule donnera très simplement les coefficiens $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$, etc., lorsque les coefficiens $b_{s+1}^{(0)}$, $b_{s+1}^{(1)}$, etc., seront connus. Quant à la valeur de $b_s^{(0)}$ on observera que l'on a $S^{-s} = (1 - 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)\, S^{-s-1}$, en remplaçant S^{-s} et S^{-s-1} par leurs valeurs en séries, et comparant dans les deux membres les termes indé-

pendans de φ on trouve :

$$b_s^{(0)} = (1+\alpha^2)\, b_{s+1}^{(0)} - 2\alpha\, b_{s+1}^{(1)}. \quad (3)$$

Réciproquement on peut déterminer les coefficiens du développement de S^{-s-1} au moyen de ceux du développement de S^{-s} supposés connus, de la manière suivante. La formule (2) donne

$$\left.\begin{aligned} b_s^{(i)} &= \frac{\alpha s}{i}\cdot\left[b_{s+1}^{(i-1)} - b_{s+1}^{(i+1)}\right] \\ b_s^{(i+1)} &= \frac{\alpha s}{i+1}\cdot\left[b_{s+1}^{(i)} - b_{s+1}^{(i+2)}\right] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

D'ailleurs, en changeant s en $s+1$ dans la formule (1), on a

$$(i-s)\, b_{s+1}^{(i+1)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\cdot i b_{s+1}^{(i)} - (i+s)\, b_{s+1}^{(i-1)},$$

$$(i-s+1)\, b_{s+1}^{(i+2)} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}(i+1)\, b_{s+1}^{(i+1)} - (i+s+1)\, b_{s+1}^{(i)}.$$

Si dans les équations (4) on substitue pour $b_{s+1}^{(i-1)}$ et $b_{s+1}^{(i+2)}$ leurs valeurs tirées des équations précédentes, on trouve

$$b_s^{(i)} = \frac{s}{i+s}\cdot\left[(1+\alpha^2)\, b_{s+1}^{(i)} - 2\alpha b_{s+1}^{(i+1)}\right],$$

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s}{i-s+1}\cdot\left[2\alpha b_{s+1}^{(i)} - (1+\alpha^2)\, b_{s+1}^{(i+1)}\right].$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} b_{s+1}^{(i)} &= \frac{(1+\alpha^2)\,(i+s)\, b_s^{(i)} - 2\alpha\,(i-s+1)\, b_s^{(i+1)}}{s\,(1-\alpha^2)^2}, \\ b_{s+1}^{(i+1)} &= \frac{2\alpha\,(i+s)\, b_s^{(i)} - (i-s+1)(1+\alpha^2)\, b_s^{(i+1)}}{s\,(1-\alpha^2)^2}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et par suite

$$\left.\begin{aligned} b^{(i)}_{s+1} + b^{(i+1)}_{s+1} &= \frac{(i+s)b^{(i)}_s - (i-s+1)b^{(i+1)}_s}{s(1-\alpha)^2}, \\ b^{(i)}_{s+1} - b^{(i+1)}_{s+1} &= \frac{(i+s)b^{(i)}_s + (i-s+1)b^{(i+1)}_s}{s(1+\alpha)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ces formules déterminent les divers coefficiens de S^{-s} au moyen de ceux de S^{-s-1}; quoique très simples, elles sont plus compliquées que les formules inverses (4). Il y aurait donc, sous ce rapport, de l'avantage à commencer par calculer les coefficiens $b^{(0)}_{s+1}$, $b^{(1)}_{s+1}$, etc., et à en déduire ensuite les coefficiens $b^{(0)}_s$, $b^{(1)}_s$, etc. Mais dans la théorie des planètes on est obligé de pousser beaucoup plus loin le développement de la fonction S^{-s} que celui de la fonction S^{-s-1}; il faut donc renoncer à faire usage des formules (4), si ce n'est comme un moyen très simple de vérifier les valeurs de $b^{(i)}_s$, $b^{(i+1)}_s$ etc., $b^{(i)}_{s+1}$, $b^{(i+1)}_{s+1}$, etc., calculées par d'autres formules.

Il est aisé d'étendre les résultats précédens au développement d'une puissance quelconque S^{-s-t} de S. En vertu des formules (5) les coefficiens de la série que cette quantité représente se détermineront au moyen des coefficiens du développement de la puissance S^{-s-t+1} qui la précède immédiatement, en sorte que le développement S^{-s} fera connaître celui des puissances S^{-s-1}, S^{-s-2}, S^{-s-3}, etc.

20. Déterminons maintenant les différences successives de $b^{(i)}_s$, $b^{(i)}_{s+1}$, etc., par rapport à α. En différen-

tiant relativement à cette quantité la formule

$$b_s^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{S^s},$$

on trouvera

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{2s}{\pi}\cdot\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{S^{s+1}}(\cos\varphi-\alpha) = \frac{s}{\pi}\Big[\int\frac{d\varphi\cos(i+1)\varphi}{S^{s+1}}$$
$$+\int\frac{d\varphi\cos(i-1)\varphi}{S^{s+1}} - 2\alpha\int\frac{d\varphi\cos i\varphi}{S^{s+1}}\Big].$$

Et par conséquent, en vertu de la formule (c),

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = s\left(b_{s+1}^{(i+1)} + b_{s+1}^{(i-1)} - 2\alpha b_{s+1}^{(i)}\right). \qquad (7)$$

formule qu'on peut déduire aussi de la formule (D) du n° 52, livre II.

On aura très simplement par cette formule la valeur de $\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}$, au moyen des valeurs de $b_{s+1}^{(i-1)}$, $b_{s+1}^{(i)}$ et $b_{s+1}^{(i+1)}$, qui se rapportent à la fonction S^{-s-1}; mais on peut l'obtenir sans être obligé de calculer ces dernières quantités. En effet, en substituant pour $b_{s+1}^{(i-1)}$, $b_{s+1}^{(i)}$, $b_{s+1}^{(i+1)}$, leurs valeurs données par les formules (5), on trouve après les réductions nécessaires

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{(i+s-1)\,b_s^{(i-1)} - (i-s+1)\,b_s^{(i+1)} + 2\alpha s b_s^{(i)}}{1-\alpha^2}. \qquad (8)$$

Cette formule déterminera $\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}$ au moyen des trois

quantités $b_s^{(i-1)}$, $b_s^{(i)}$ et $b_s^{(i+1)}$ supposées connues, en substituant pour $b_s^{(i-1)}$ sa valeur donnée par l'équation (1) en fonction de $b_s^{(i)}$ et $b_s^{(i+1)}$, on aurait une formule analogue à la formule (D) du n°. 52 du livre II, qui ne contiendrait que les deux quantités $b_s^{(i)}$ et $b_s^{(i+1)}$; mais la précédente étant plus simple, elle sera d'une application plus facile pour les calculs numériques. En la différentiant par rapport à α, on aurait les différences successives $\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2}$, $\frac{d^3 b_s^{(i)}}{d\alpha^3}$, etc.; mais il y a sur l'usage de ces formules une observation importante à faire. Elles font dépendre la détermination de $\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha}$ de la quantité $b_s^{(i+1)}$, celle de $\frac{db_s^{(i+1)}}{d\alpha}$ de $b_s^{(i+2)}$, et ainsi de suite. Or, comme la différence $n^{ième}$ de $b_s^{(i)}$ contient la quantité $\frac{db_s^{(i+n-1)}}{d\alpha}$, il en résulte que cette différence dépendra de la quantité $b^{(i+n)}$. Par conséquent, pour avoir $\frac{d^n b_s^{(i)}}{d\alpha^n}$, on sera obligé de prolonger jusqu'à $b^{(i+n)}$ le calcul des quantités $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, etc. Pour éviter cette opération, qui devient inutile lorsqu'on n'a besoin que des quantités $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, ... $b_s^{(i)}$, et de leurs n premières différences,

on substituera dans l'équation (8) pour $b_s^{(i+1)}$ sa valeur, on aura ainsi

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{2(i+s-1)}{1-\alpha^2}.b_s^{(i-1)} - \frac{i+(i-2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}.b_s^{(i)}, \qquad (9)$$

équation qui résulte d'ailleurs de la formule (D) n° 52, livre II, en y changeant i en $-i$.

Si pour plus de simplicité on met cette équation sous cette forme,

$$(1-\alpha^2)\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = 2(i+s-1)b_s^{(i-1)} - \frac{i+(i-2s)\alpha^2}{\alpha}b_s^{(i)},$$

et qu'on la différentie ensuite, elle fera connaître les valeurs des différences successives de $b_s^{(i)}$, au moyen de celles des quantités $b^{(i-1)}$ et $b_s^{(i)}$ supposées connues; et comme la détermination de ces valeurs ne dépend que de celles de $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$, il ne nous restera en définitive que ces deux quantités à déterminer. Mais la formule précédente se complique à mesure que l'on considère les différences de $b_s^{(i)}$ d'un ordre plus élevé, il est donc utile de chercher des formules qui puissent s'adapter plus facilement aux calculs numériques.

L'équation (2) donne en la différentiant

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{s}{i}\left(b_{s+1}^{(i-1)} - b_{s+1}^{(i+1)}\right) + \frac{s\alpha}{i}\left(\frac{db_{s+1}^{(i-1)}}{d\alpha} - \frac{db_{s+1}^{(i+1)}}{d\alpha}\right);$$

d'où, en substituant pour $\frac{db^{(i)}}{d\alpha}$ sa valeur (9), on tire

$$\frac{db^{(i-1)}_{s+1}}{da} - \frac{db^{(i+1)}_{s+1}}{da} = \frac{(i-1)\,b^{(i-1)}_{s+1} + (i+1)\,b^{(i+1)}_{s+1} - 2ai\,b^{(i)}_{s+1}}{a}.$$

Comme l'exposant s n'entre pas dans cette équation, on aura de même

$$\frac{db^{(i-1)}_{s}}{da} - \frac{db^{(i+1)}_{s}}{da} = \frac{(i-1)\,b^{(i-1)}_{s} + (i+1)\,b^{(i+1)}_{s} - 2ia\,b^{(i)}_{s}}{a}. \quad (10)$$

L'usage de cette formule n'est sujet à aucun inconvénient, et en la différentiant on trouvera successivement

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2b^{(i-1)}_{s}}{da^2} - \frac{d^2b^{(i+1)}_{s}}{da^2} &= \frac{1}{a}\left[(i-2)\frac{db^{(i-1)}_{s}}{da} + (i+2)\frac{db^{(i+1)}_{s}}{da} - 2ib^{(i)}_{s}\right] - 2i\frac{db^{(i)}_{s}}{da},\\
\frac{d^3b^{(i-1)}_{s}}{da^3} - \frac{d^3b^{(i+1)}_{s}}{da^3} &= \frac{1}{a}\left[(i-3)\frac{d^2b^{(i-1)}_{s}}{da^2} + (i+3)\frac{d^2b^{(i+1)}_{s}}{da^2} - 4i\frac{db^{(i)}_{s}}{da}\right] - 2i\frac{d^2b^{(i)}_{s}}{da^2},\\
\frac{d^4b^{(i-1)}_{s}}{da^4} - \frac{d^4b^{(i+1)}_{s}}{da^4} &= \frac{1}{a}\left[(i-4)\frac{d^3b^{(i-1)}_{s}}{da^3} + (i+4)\frac{d^3b^{(i+1)}_{s}}{da^3} - 6i\frac{d^2b^{(i)}_{s}}{da^2}\right] - 2i\frac{d^3b^{(i)}_{s}}{da^3},\\
\frac{d^5b^{(i-1)}_{s}}{da^5} - \frac{d^5b^{(i+1)}_{s}}{da^5} &= \frac{1}{a}\left[(i-5)\frac{d^4b^{(i-1)}_{s}}{da} + (i+5)\frac{d^4b^{(i+1)}_{s}}{da} - 8i\frac{d^3b^{(i)}_{s}}{da^3}\right] - 2i\frac{d^4b^{(i)}_{s}}{da^4},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} (11)$$

La loi de ces formules est évidente, et l'on peut les prolonger aussi loin qu'on le voudra ; elles donneront très simplement les valeurs des différences successives d'un coefficient quelconque $b^{(i)}_{s}$, lorsque les différences des deux premiers coefficiens $b^{(0)}_{s}$ et $b^{(1)}_{s}$ seront connues.

Or, en faisant successivement $i = 0$ et $i = 1$ dans l'équation (9), on trouve

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} &= \frac{2s\alpha b_s^{(0)} + 2(s-1)\,b_s^{(1)}}{1-\alpha^2},\\ \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} &= \frac{2sb_s^{(0)} + [(2s-1)\,\alpha^2 - 1]\,b_s^{(1)}}{\alpha(1-\alpha^2)};\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

d'où l'on tire

$$\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} - \alpha\,\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} = (2s-1)\,b_s^{(1)},$$

$$\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} - \alpha\,\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} = \frac{2s\alpha b_s^{(0)} - b_s^{(1)}}{\alpha}.$$

En différentiant cette expression, on trouve

$$\frac{d^2b_s^{(0)}}{d\alpha^2} - \alpha\,\frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha^2} = 2s\,\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha^2} - \alpha\,\frac{d^2b_s^{(0)}}{d\alpha^2} = 2s\left(\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} - \frac{1}{\alpha}\,b_s^{(0)}\right) + \frac{2}{\alpha^2}\,b_s^{(1)}.$$

En combinant ensemble ces quatre équations, on formera les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2b_s^{(0)}}{d\alpha^2} &= \frac{[(4s+1)\alpha^2 - 1]}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{4s^2}{1-\alpha^2}\cdot b_s^{(0)},\\ \frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha^2} &= \frac{[(4s+1)\alpha^2 - 1]}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} + \frac{[(4s^2-1)\,\alpha^2+1]}{\alpha^2(1-\alpha^2)}\cdot b_s^{(1)}.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Ces formules serviront à déterminer directement la différence du second ordre $\frac{d^2b_s^{(0)}}{d\alpha^2}$ par le moyen de la quantité $b_s^{(0)}$ et de sa différence première, et l'on aura de même le coefficient $\frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha^2}$, quand les deux quantités $\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}$ et $b_s^{(1)}$ seront connues.

En différentiant de nouveau ces équations, on formera les différences successives de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$; on obtient de cette manière

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3 b_s^{(0)}}{d\alpha^3} &= \frac{(4s+4)\alpha^2-2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^2 b_s^{(0)}}{d\alpha^2} + \frac{(4s^2+8s+2)}{1-\alpha^2}\cdot\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{4s^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot b_s^{(0)}, \\
\frac{d^4 b_s^{(0)}}{d\alpha^4} &= \frac{(4s+7)\alpha^2-3}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^3 b_s^{(0)}}{d\alpha^3} + \frac{(4s^2+16s+10)}{1-\alpha^2}\cdot\frac{d^2 b_s^{(0)}}{d\alpha^2} + \frac{8s^2+8s+2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}, \\
\frac{d^5 b_s^{(0)}}{d\alpha^5} &= \frac{(4s+10)\alpha^2-4}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^4 b_s^{(0)}}{d\alpha^4} + \frac{4s^2+24s+24}{1-\alpha^2}\cdot\frac{d^3 b_s^{(0)}}{d\alpha^3} + \frac{12s^2+24s+12}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^2 b_s^{(0)}}{d\alpha^2}, \\
&\text{etc.;} \\
\frac{d^3 b_s^{(1)}}{d\alpha^3} &= \frac{(4s+5)\alpha^2-3}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^2 b_s^{(1)}}{d\alpha^2} + \frac{4s^2+12s+2}{1-\alpha^2}\cdot\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha} + \frac{8s^2-2}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot b_s^{(1)}, \\
\frac{d^4 b_s^{(1)}}{d\alpha^4} &= \frac{(4s+8)\alpha^2-4}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^3 b_s^{(1)}}{d\alpha^3} + \frac{4s^2+20s+12}{1-\alpha^2}\cdot\frac{d^2 b_s^{(1)}}{d\alpha^2} + \frac{12s^2+12s}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}, \\
\frac{d^5 b_s^{(1)}}{d\alpha^5} &= \frac{(4s+11)\alpha^2-5}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^4 b_s^{(1)}}{d\alpha^4} + \frac{4s^2+28s+28}{1-\alpha^2}\cdot\frac{d^3 b_s^{(1)}}{d\alpha^3} + \frac{16s^2+32s+12}{\alpha(1-\alpha^2)}\cdot\frac{d^2 b_s^{(1)}}{d\alpha^2}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Ces séries peuvent être prolongées aussi loin que l'on voudra, et elles donneront toujours les différences de $b_s^{(0)}$ et de $b_s^{(1)}$ d'un ordre quelconque, au moyen des trois différences qui les précèdent immédiatement.

On pourrait d'ailleurs se borner à calculer ces dernières formules, et déduire ensuite les valeurs des différences successives de $b_s^{(0)}$ de celles de $b_s^{(1)}$, par le moyen des formules suivantes :

$$\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha}=\alpha\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}+(2s-1)\,b_s^{(1)},$$

$$\frac{d^2b_s^{(0)}}{d\alpha^2}=\alpha\frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha}+2s\frac{db_s^{(1)}}{d\alpha},$$

$$\frac{d^3b_s^{(0)}}{d\alpha^3}=\alpha\frac{d^3b_s^{(1)}}{d\alpha}+(2s+1)\frac{d^2b_s^{(1)}}{d\alpha^2},$$

$$\frac{d^4b_s^{(0)}}{d\alpha^4}=\alpha\frac{d^4b_s^{(1)}}{d\alpha}+(2s+2)\frac{d^3b_s^{(1)}}{d\alpha^3},$$

etc.,

équations dont la loi est évidente.

On peut encore par la combinaison des formules précédentes en trouver une infinité d'autres propres à calculer les quantités $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, etc., et leurs différences successives ; c'est au calculateur à choisir dans chaque cas celles dont l'usage lui paraîtra le plus avantageux.

Enfin, si l'on était obligé de calculer à la fois et avec un même degré de précision les coefficiens des deux séries S^{-s} et S^{-s-1}, on pourrait déterminer d'une manière très simple les différences successives des quantités $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, etc., que l'on aurait soin, dans ce cas, de calculer les premières. En effet, la formule (9) donne, en différentiant,

$$\frac{d^2b_s^{(i)}}{d\alpha^2}=s\left(\frac{db_{s+1}^{(i-1)}}{d\alpha}+\frac{db_{s+1}^{(i+1)}}{d\alpha}-2\alpha\frac{db_{s+1}^{(i)}}{d\alpha}-2b_{s+1}^{(i)}\right). \quad (15)$$

Mais si dans la formule (8) on change s en $s+1$,

et qu'ensuite à la place de i on substitue successivement $i+1$ et $-i$, en observant que $b^{(-i)}_{s+1} = b^{(i)}_{s+1}$, on aura les deux suivantes :

$$\frac{db^{(i+1)}_{s+1}}{d\alpha} = \frac{2(i+s+1)}{1-\alpha^2}\, b^{(i)}_{s+1} - \frac{i+1+(i-2s-1)}{\alpha(1-\alpha^2)}\, b^{(i+1)}_{s+1},$$

$$\frac{db^{(i)}_{s+1}}{d\alpha} = \frac{2(s-i-1)}{1-\alpha^2}\, b^{(i)}_{s+1} + \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\, b^{(i+1)}_{s+1}.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, après l'avoir multipliée par α, on trouvera, toute réduction faite, cette formule très simple

$$\frac{db^{(i+1)}_{s+1}}{d\alpha} - \alpha\,\frac{db^{(i)}_{s+1}}{d\alpha} = (i+2s+2)\,b^{(i)}_{s+1} - \frac{i+1}{\alpha}\, b^{(i+1)}_{s+1};$$

on aurait semblablement

$$\frac{db^{(i-1)}_{s+1}}{d\alpha} - \alpha\,\frac{db^{(i)}_{s+1}}{d\alpha} = (2s-i+2)\,b^{(i)}_{s+1} + \frac{i-1}{\alpha}\, b^{(i-1)}_{s+1};$$

Cette formule dérive d'ailleurs de la précédente, en y changeant i en $-i$. La différence de ces deux équations donne la formule (10); en les ajoutant on trouve

$$\frac{db^{(i-1)}_{s+1}}{d\alpha} + \frac{db^{(i+1)}_{s+1}}{d\alpha} - 2\alpha\,\frac{db^{(i)}_{s+1}}{d\alpha} = 4(s+1)\,b^{(i)}_{s+1} + \frac{i-1}{\alpha}\, b^{(i-1)}_{s+1} - \frac{i+1}{\alpha}\, b^{(i+1)}_{s+1}.$$

La formule (15) devient ainsi

$$\frac{d^2 b^{(i)}_{s}}{d\alpha^2} = 2s(2s+1)\,b^{(i)}_{s+1} + \frac{s}{\alpha}\left[(i-1)\,b^{(i-1)}_{s+1} - (i+1)\,b^{(i+1)}_{s+1}\right]. \quad (16)$$

En suivant le même procédé, on déterminera par

des formules très simples les différences successives de $b_s^{(i)}$, au moyen des quantités $b_{s+1}^{(i+1)}$, $b_{s+1}^{(i)}$, $b_{s+1}^{(i-1)}$ supposées connues.

Dans le cas où l'on suppose $s=\frac{1}{2}$, les équations (9) et (16) deviennent

$$\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}=\frac{1}{2}\left(b_{\frac{3}{2}}^{(i-1)}+b_{\frac{3}{2}}^{(i+1)}\right)-\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(i)},$$

$$\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}=\frac{1}{2\alpha}\left[(i-1)\,b_{\frac{3}{2}}^{(i-1)}-(i+1)\,b_{\frac{3}{2}}^{(i+1)}\right]+2b_{\frac{3}{2}}^{(i)}.$$

Les formules précédentes, ainsi que les formules (11), sont sujettes à quelques inconvéniens lorsque α est une très petite quantité; mais alors on tombe dans le cas d'exception du n° 18, et au lieu d'employer ces formules, il vaudra mieux calculer directement les différences successives de $b_s^{(i)}$ par le moyen des séries. En effet, si pour plus de simplicité on fait

$$m=2\frac{s.s+1.s+2\ldots s+i-1}{1.2.3\ldots i},\qquad n=m.\frac{s.s+1}{1.i+1}$$

$$p=mn.\frac{s+1.s+i+1}{2.i+2},\qquad q=mnp.\frac{s+2.s+i+2}{3.i+3},$$

etc.,

la formule (m) donnera

$$b_s^{(i)}=m\alpha^i+n\alpha^{i+2}+p\alpha^{i+4}+q\alpha^{i+6}+\text{etc.};$$

et en différentiant on aura

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = im\alpha^{i-1} + (i+2)n\alpha^{i+1} + (i+4)p\alpha^{i+3} + (i+6)q\alpha^{i+5} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^2b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = i(i-1)m\alpha^{i-2} + (i+1)(i+2)n\alpha^{i} + (i+3)(i+4)p\alpha^{i+2} + (i+5)(i+6)q\alpha^{i+4} + \text{etc.},$$

$$\frac{d^3b_s^{(i)}}{d\alpha^3} = i(i-1)(i-2)m\alpha^{i-3} + i(i+1)(i+2)n\alpha^{i-1} + (i+2)(i+3)(i+4)p\alpha^{i+1} + (i+4)(i+5)(i+6)q\alpha^{i+3} + \text{etc.},$$

etc.

On pourra donc déterminer les différences successives de $b_s^{(i)}$ par ces séries, qui seront très convergentes si α est une petite quantité, et dont le calcul sera facile à cause de la répétition des mêmes coefficiens m, n, p, etc.

21. Dans les applications des formules précédentes à la théorie des perturbations planétaires on suppose ordinairement $s = \frac{1}{2}$; nous allons rassembler, pour la facilité des calculs numériques, les formules relatives à ce cas.

Les deux quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ étant connues, on aura $b_{\frac{1}{2}}^{(2)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$, etc., par la formule

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i+1)} = \frac{2i(1+\alpha^2)\,b_{\frac{1}{2}}^{(i)} - (2i-1)\alpha\, b_{\frac{1}{2}}^{(i-1)}}{(2i+1)\alpha},$$

applicable toutes les fois que α ne sera pas une très petite quantité; dans ce cas la série (m), en y faisant $s = \frac{1}{2}$, donnera

$$b_{\frac{1}{2}}^{(i)} = 2.\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2.4.6\ldots 2i}.\Big(\alpha^i + \frac{1}{2}.\frac{2i+1}{2i+2}.\alpha^{i+2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{2i+1}{2i+2}.\frac{2i+3}{2i+4}.\alpha^{i+4} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{2i+1}{2i+2}.\frac{2i+3}{2i+4}.\frac{2i+5}{2i+6}.\alpha^{i+6} + \text{etc.}\Big).$$

Connaissant $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, etc., on déterminera $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, $b^{(2)}_{\frac{3}{2}}$, etc., par la formule

$$b^{(i)}_{\frac{3}{2}} = \frac{2i+1}{(1-\alpha^2)^2}\cdot\left[(1+\alpha^2)\,b^{(i)}_{\frac{1}{2}} - 2\alpha\, b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}\right],$$

ou bien par les deux formules suivantes, plus commodes pour les calculs numériques,

$$\left.\begin{aligned} b^{(i)}_{\frac{3}{2}} + b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}} &= \frac{2i+1}{(1-\alpha)^2}\cdot\left(b^{(i)}_{\frac{1}{2}} - b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}\right), \\ b^{(i)}_{\frac{3}{2}} - b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}} &= \frac{2i+1}{(1+\alpha)^2}\cdot\left(b^{(i)}_{\frac{1}{2}} + b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Les différences successives de $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(3)}_{\frac{1}{2}}$, etc., s'obtiendront par les formules (10) et (11), dès qu'on connaîtra les différences successives de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, et l'on aura celles-ci par les formules suivantes :

$$\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} - b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{1-\alpha^2},$$

$$\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = \frac{(3\alpha^2-1)\dfrac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)},$$

$$\frac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = \frac{2(3\alpha^2-1)\dfrac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 9\alpha\dfrac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\alpha(1-\alpha^2)},$$

$$\frac{d^4b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} = \frac{3(3\alpha^2-1)\dfrac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 19\alpha\dfrac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 8\dfrac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}}{\alpha(1-\alpha^2)},$$

$$\frac{d^5b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5} = \frac{4(3\alpha^2-1)\dfrac{d^4b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + 37\alpha\dfrac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 27\dfrac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}}{\alpha(1-\alpha^2)},$$

etc. ;

$$\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$

$$\frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 2\,\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right),$$

$$\frac{d^4b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(\frac{d^4b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - 3\,\frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

etc.

En différentiant les équations (17), on aura pour déterminer les différences successives de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, etc., au moyen de celles de $b^{0}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, etc., supposées connues, les formules suivantes :

$$\frac{db^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \frac{db^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = \frac{(2i+1)}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \frac{db^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right) + \frac{2}{1-\alpha}\cdot\left(b^{(i)}_{\frac{3}{2}} + b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} = \frac{2i+1}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right)$$
$$+ \frac{4}{1-\alpha}\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{db^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right) - \frac{2}{(1-\alpha)^2}\left(b^{(i)}_{\frac{3}{2}} + b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + \frac{d^3b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} = \frac{2i+1}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - \frac{d^3b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right)$$
$$+ \frac{6}{1-\alpha}\left(\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right) - \frac{6}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \frac{db^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right),$$

etc. ;

$$\frac{db^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - \frac{db^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = \frac{2i+1}{(1+\alpha)^2}.\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + \frac{db^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right) - \frac{2}{1+\alpha}\left(b^{(i)}_{\frac{3}{2}} - b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}\right),$$

$$\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} = \frac{2i+1}{(1+\alpha)^2}.\left(\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}\right)$$

$$- \frac{4}{1+\alpha}\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} - \frac{db^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right) - \frac{2}{(1+\alpha)^2}\left(b^{(i)}_{\frac{1}{2}} - b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} - \frac{d^3b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} = \frac{2i+1}{(1-\alpha)^2}.\left(\frac{d^3b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + \frac{d^3b^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3}\right)$$

$$+ \frac{6}{1-\alpha}\left(\frac{d^2b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \frac{d^2b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right) - \frac{6}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{db^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - \frac{db^{(i+1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right),$$

etc.

On peut aussi calculer directement les différences successives de $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, etc., au moyen des formules (12), (13) et (14), dans lesquelles on fera $s = \frac{3}{2}$.

Enfin, si l'on suppose $s = \frac{3}{2}$ dans les formules (5) et (6), on aura

$$b^{(i)}_{\frac{5}{2}} = \frac{(1+\alpha^2)(2i+3)\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}} - 2\alpha(2i-1)\,b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{3(1-\alpha^2)^2},$$

ou bien

$$b^{(i)}_{\frac{5}{2}} + b^{(i+1)}_{\frac{5}{2}} = \frac{(2i+3)\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}} - (2i-1)\,b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{3(1-\alpha)^2},$$

$$b^{(i)}_{\frac{5}{2}} - b^{(i+1)}_{\frac{5}{2}} = \frac{(2i+3)\,b^{(i)}_{\frac{3}{2}} + (2i-1)\,b^{(i+1)}_{\frac{3}{2}}}{3(1+\alpha)^2}.$$

On déterminera au moyen de ces formules les quantités $b^{(0)}_{\frac{5}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{5}{2}}$, etc., lorsque les quantités $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$,

$b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, etc., seront connues; et en différentiant ces mêmes équations, on aura les différences successives des premières quantités en fonction des différences correspondantes des secondes. On pourra aussi calculer ces différences au moyen des formules (11), dans lesquelles on fera $s = \frac{5}{2}$.

Ces formules sont celles dont l'emploi m'a paru le plus simple dans les applications numériques; elles ramèneront, comme on voit, les déterminations des quantités $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$ $b^{(3)}_{\frac{1}{2}}$, etc. $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, $b^{(2)}_{\frac{3}{2}}$, etc., $b^{(0)}_{\frac{5}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{5}{2}}$, $b^{(2)}_{\frac{5}{2}}$, etc., et de leurs différences successives à celles des quantités $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ et $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, il ne reste donc plus que ces deux quantités à déterminer. Nous avons montré dans le n° 50, livre II, comment on pouvait y parvenir par le moyen des séries; ce moyen est celui qui se présente d'abord : cependant il est plus expéditif et plus commode, dans les applications, d'employer pour cet objet le calcul des fonctions elliptiques. Mais avant de montrer l'application qu'on en doit faire à la détermination des deux quantités dont il s'agit, nous donnerons ici quelques notions générales sur ce genre de fonctions, dont l'usage est devenu presque élémentaire par les rapides progrès qu'a faits dans ces derniers temps l'analyse dans cette branche du calcul intégral.

22. On appelle fonctions elliptiques toute espèce de fonctions différentielles dont les intégrales peuvent s'exprimer par des arcs d'ellipse ou d'hyperbole.

Ces transcendantes sont généralement comprises

dans la formule $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, où P est une fonction rationnelle de x, et R un polynome en x du quatrième degré.

Toute fonction de cette espèce peut se ramener par des transformations très simples à la forme $\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$, où Q est une fonction de degré pair de $\sin\varphi$, et c une quantité plus petite que l'unité. Il suffira, pour cela, dans la plupart des cas, de faire $x = \sqrt{\frac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}}$, et de déterminer convenablement les coefficiens constans A, B, C et D.

Maintenant, quel que soit Q, pourvu que ce soit une fonction rationnelle de $\sin^2\varphi$, on démontre fort aisément que l'intégrale $\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}$ peut se réduire 1°. à une partie algébrique, 2° à une suite de transcendantes comprises sous la forme générale,

$$\int \frac{A' + B'\sin^2\varphi}{C' + D'\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

où A′, B′, C′ et D′ sont des coefficiens constans, réels ou imaginaires (*).

Or, la formule précédente, comme il est aisé de s'en convaincre, peut s'écrire ainsi :

$$H\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} + K\int d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi} + L\int \frac{d\varphi}{1+a\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

(*) *Traité des Fonctions elliptiques*, n° 8.

De là la division des fonctions elliptiques en trois espèces distinctes, auxquelles on peut ramener toutes les autres transcendantes du même genre. Ces trois classes se nomment *fonctions elliptiques de première, seconde et troisième espèce*, et l'on désigne d'ordinaire ces fonctions par les symboles respectifs $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$, $\Pi(c, a, \varphi)$, en faisant

$$F(c,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$F(c,\varphi) = \int d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

$$\Pi(c,a,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1 + a \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}};$$

ces intégrales étant supposées s'évanouir quand $\varphi = 0$, et leur étendue dépendant de la valeur qu'on assigne à cet angle.

La variable φ se nomme l'*amplitude* de la fonction, la constante c, toujours moindre que l'unité, s'appelle le *module* ; enfin la constante a, qui n'entre que dans la fonction de troisième espèce, et qui peut être positive ou négative, réelle ou imaginaire, se nomme le *paramètre*.

La fonction de seconde espèce $E(c,\varphi)$ représente, comme on sait, un arc d'ellipse, et l'on a donné généralement le nom de *fonctions elliptiques* aux transcendantes comprises dans la formule $\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}}$, parce que les arcs d'ellipse s'y trouvent compris, bien que cette intégrale puisse représenter encore d'autres courbes, et doive avoir une signification beaucoup plus étendue.

Lorsque les intégrales représentées par $F(c, \varphi)$, $E(c,\varphi)$ et $\Pi(c,a, \varphi)$, sont prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on dit que ces fonctions sont complètes, et pour les distinguer on omet l'amplitude φ dans leur notation, en sorte que, dans le cas des fonctions complètes, on a

$$F(c) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}},$$

$$E(c) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

$$\Pi(c,a) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1 + a\sin^2\varphi)\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Enfin, pour abréger, on fait souvent $\sqrt{1 - c^2} = b$, ce qui donne $b^2 + c^2 = 1$, et b se nomme le *complément* du module c.

Cela posé, considérons d'abord la fonction elliptique de première espèce, qui est plus simple que les deux autres. La plus remarquable de ses propriétés, c'est qu'étant données deux fonctions de cette espèce qui ont même module, et qui ne diffèrent que par leurs amplitudes, on peut toujours trouver par des opérations purement algébriques une troisième fonction de même espèce qui soit égale à leur somme ou à leur différence. Il suit de là qu'on peut toujours déterminer algébriquement une fonction elliptique multiple ou sous-multiple d'une fonction donnée, et plus généralement encore une fonction qui soit à la première dans un rapport quelconque;

propriété que les fonctions elliptiques de première espèce partagent avec les fonctions logarithmiques et circulaires.

Les fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce jouissent de propriétés analogues, mais moins simples. Ainsi on peut toujours déterminer algébriquement une fonction elliptique de seconde espèce qui soit égale à la somme ou à la différence de deux fonctions de même espèce, plus à une quantité algébrique, et enfin une fonction de troisième espèce égale à la somme ou à la différence de deux fonctions données de même espèce, plus à une quantité exprimée par arcs de cercle ou par logarithmes.

Comme la réunion des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce comprend les arcs mesurés sur l'ellipse et l'hyperbole, on voit qu'il sera toujours possible de déterminer sur chacune de ces courbes, non pas comme dans le cercle, un arc égal à la somme ou à la différence de deux arcs donnés, mais égal à cette somme, plus ou moins une quantité algébrique. Cette propriété de ces deux courbes est d'autant plus remarquable qu'elle a été découverte par *Fagnani*, avant qu'on se fût encore occupé sérieusement de la théorie des fonctions elliptiques, et qu'elle a pour ainsi dire ouvert aux géomètres cette carrière nouvelle.

Euler, qui généralisa ce résultat et en donna la démonstration analytique, fut conduit ainsi à comparer entre eux non seulement des arcs mesurés sur la même ellipse ou sur la même hyperbole, mais encore

toutes les transcendantes renfermées dans la formule $\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$; mais dans ce rapprochement, il supposa toujours que les fonctions d'une même espèce avaient le même module, et qu'elles ne différaient que par leur amplitude, ou, ce qui revient au même, que les arcs que ces fonctions représentent appartenaient à la même courbe. Aussi cette comparaison, qui lui fit découvrir sur la multiplication et la division de ces fonctions les beaux théorèmes que nous avons énoncés plus haut, ne lui apprit rien relativement à leur intégration.

Lagrange eut l'heureuse idée de comparer entre elles sous un nouveau point de vue deux fonctions elliptiques de même espèce; il supposa que dans ces deux fonctions l'amplitude et le module varient à la fois, et il fut ainsi conduit à une méthode générale, pour trouver par des approximations successives les intégrales de la forme $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$.

En effet, Lagrange remarqua d'abord que l'intégrale d'une fonction elliptique de première espèce $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$ s'obtiendrait sans difficulté par les séries, si c était supposé une quantité très petite ou une quantité à très peu près égale à l'unité. Ainsi donc, si l'on pouvait ramener la fonction $F(c, \varphi)$ à une autre fonction $F(c', \varphi')$, dans laquelle le module c' serait moindre ou plus grand que c, et déterminer algébriquement le rapport de ces deux fonctions, en

opérant de la même manière sur celle-ci, on obtiendrait la valeur de la fonction donnée, exprimée par une suite de fonctions de même espèce, dont la dernière serait intégrable d'elle-même, et l'on aurait ainsi un moyen très simple de trouver les intégrales approchées de toute espèce de fonctions elliptiques.

Soient donc $F(c, \varphi)$ une fonction donnée, et $F(c', \varphi')$ une fonction de même espèce dont le module c' et l'amplitude φ' sont arbitraires, si l'on pose l'équation

$$F(c, \varphi) = \mu F(c', \varphi'), \quad (\alpha),$$

ou bien

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}} = \mu \int \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2\varphi'}}, \quad (6)$$

il s'agira de déterminer algébriquement μ, c' et φ' en fonction du module c et de l'amplitude φ, de manière à satisfaire à l'équation précédente.

Or, si l'on suppose

$$\sin\varphi = \frac{\mu \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin^2\varphi'}}; \quad c' = \frac{2\sqrt{c}}{1 + c}, \quad (*)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi, \quad c' = \frac{2\sqrt{c}}{1 + c} \quad (\gamma),$$

d'où l'on tire $\cos(2\varphi' - \varphi) = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}$. Il est facile de s'assurer que ces valeurs substituées dans l'équation (6) donneront

(*) Voir les notes à la fin du volume.

$$F(c',\varphi') = \frac{1+c}{2} F(c,\varphi); \quad (\alpha')$$

équation qui, comparée à l'équation (α), donne $\mu = \frac{2}{1+c} = \frac{c'}{\sqrt{c}}$. Il suit de là que les deux fonctions $F(c,\varphi)$ et $F(c',\varphi')$ sont entre elles dans un rapport constant, quelles que soient les amplitudes φ et φ', pourvu que ces angles, ainsi que les constantes c et c', soient liés par les équations (γ) ou par les équations suivantes qui en dérivent :

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = b' \operatorname{tang} \varphi', \quad b' = \frac{1-c}{1+c} \quad (\delta),$$

en supposant, comme nous l'avons dit, $b = \sqrt{1-c^2}$.

Les premières formules serviront à déterminer φ' et c' en fonction de φ et c; les secondes peuvent servir réciproquement à déterminer c et φ en fonction de c' et φ' supposés connus.

L'équation $F(c,\varphi) = \frac{1+c}{2} F(c',\varphi')$ ayant lieu quel que soit φ, si l'on suppose $\varphi = \pi$, ce qui donne $\varphi' = \frac{1}{2}\pi$, en observant que d'après les lois de la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce on a $F(c',\pi) = 2F(c,\frac{1}{2}\pi)$ (*), on aura entre les fonctions complètes $F(c)$ et $F(c')$ la relation très simple

$$F(c') = (1+c)F(c).$$

Passons aux fonctions elliptiques de seconde es-

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques*, n° 21.

pèce. Les valeurs de φ' et c' tirées des équations (γ) donnent l'équation différentielle

$$d\varphi' \sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{d\varphi}{\Delta} \cdot \frac{(c \cos \varphi + \Delta)^2}{2(1 + c)}.$$

En faisant, pour abréger, $\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}$, cette équation peut s'écrire ainsi :

$$(1 + c) d\varphi' \sqrt{1 - c'^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{d\varphi}{\Delta} . (\Delta^2 - \tfrac{1}{2} b^2 + c \cos \varphi \Delta),$$

d'où en intégrant on tire

$$(1 + c) \mathrm{E}(c', \varphi') = \mathrm{E}(c, \varphi) - \tfrac{1}{2} b^2 \mathrm{F}(c, \varphi) + c \sin \varphi. \quad (\mu)$$

Cette équation fait voir que la fonction de première espèce $\mathrm{F}(c, \varphi)$ peut s'exprimer par deux fonctions de seconde espèce $\mathrm{E}(c, \varphi)$, $\mathrm{E}(c', \varphi')$, ou en d'autres termes, que tout arc d'hyperbole peut s'évaluer par deux arcs mesurés sur l'ellipse; ce qui est l'énoncé du théorème de *Landen*.

Si l'on suppose $\varphi' = \frac{1}{2} \pi$ et $\varphi = \pi$, on aura $\mathrm{E}(c', \varphi') = \mathrm{E}(c')$ et $\mathrm{E}(c, \varphi) = \mathrm{E}(c, \pi) = 2\mathrm{E}(c)$. On aura donc simplement dans le cas des fonctions complètes,

$$(1 + c') \mathrm{E}(c') = 2\mathrm{E}(c) - b^2 \mathrm{F}(c).$$

Les formules (α') et (δ') serviront à exprimer les fonctions $\mathrm{F}(c, \varphi)$ et $\mathrm{E}(c, \varphi)$ dont le module est c, au moyen des fonctions semblables $\mathrm{F}(c', \varphi')$ et $\mathrm{E}(c', \varphi')$, dont le module est c', et réciproquement; car il est évident qu'on pourra déduire de ces mêmes équa-

tions les valeurs de $F(c', \varphi')$ et de $E(c', \varphi')$ en fonction de $F(c, \varphi)$ et de $E(c, \varphi)$. Dans le premier cas, l'amplitude et le module de la fonction dérivée se détermineront par les équations (δ), et dans le second, on les déterminera au moyen des équations (γ).

Si, comme nous le supposons, c est une très petite quantité, on aura à très peu près $c' = 2\sqrt{c}$, le module c' de la fonction dérivée sera donc alors toujours beaucoup plus grand que le module c de la fonction proposée; si au contraire c' est le module de la fonction primitive, on aura, dans ce cas, à très peu près, $c = \frac{1}{4}c'^2$, et l'on passera du module très petit c' au module beaucoup plus petit c. On aura donc ainsi le moyen de transformer toute fonction donnée de première ou de seconde espèce en une autre fonction de même espèce, dans laquelle le module sera plus grand ou plus petit à volonté, que le module de la fonction proposée. On pourra ensuite faire subir à la fonction dérivée, des transformations analogues, et ainsi de suite à l'infini.

Cela posé, concevons que étant donnée une fonction elliptique de première espèce $F(c, \varphi)$ dont il faut déterminer la valeur approchée, on forme une suite de modules c', c'', c''', etc., liés entre eux par les équations

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \quad c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''}, \text{ etc.},$$

qu'on prolongera jusqu'à ce qu'on arrive à une valeur de c peu différente de l'unité; qu'on détermine

les amplitudes correspondantes φ', φ'', φ''', etc., par les équations

$$\left.\begin{array}{l} \sin(2\varphi' - \varphi\ ) = c\ \sin\varphi\ , \\ \sin(2\varphi'' - \varphi') = c'\sin\varphi', \\ \sin(2\varphi''' - \varphi'') = c''\sin\varphi'', \\ \text{etc.}\ ; \end{array}\right\} \quad (r)$$

il en résultera une suite de fonctions de première espèce $(\mathrm{F}c, \varphi)$, $\mathrm{F}(c', \varphi')$, $\mathrm{F}(c'', \varphi'')$, etc., qui seront liées entre elles par les équations

$$\mathrm{F}(c', \varphi') = \frac{1+c}{2}\,\mathrm{F}(c, \varphi),$$

$$\mathrm{F}(c'', \varphi'') = \frac{1+c'}{2}\,\mathrm{F}(c', \varphi') = \frac{1+c}{2}\cdot\frac{1+c'}{2}\,\mathrm{F}(c, \varphi),$$

$$\mathrm{F}(c''', \varphi''') = \frac{1+c''}{2}\,\mathrm{F}(c'', \varphi'') = \frac{1+c}{2}\cdot\frac{1+c'}{2}\cdot\frac{1+c''}{2}\,\mathrm{F}(c, \varphi),$$

etc.

Or, les modules c', c'', c''', etc., comme nous l'avons vu, forment une suite qui croît d'une manière rapide; cette suite a pour limite l'unité, qu'elle atteint au bout d'un petit nombre de termes; mais lorsque c est peu différent de l'unité, on a, à très peu près,

$$\mathrm{F}(c, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi\right).$$

En nommant donc Φ l'amplitude correspondante au module très peu différent de l'unité auquel on se sera arrêté dans la suite ascendante c, c', c'', etc., et en faisant pour abréger

$$\mathrm{H} = \frac{2}{1+c} \cdot \frac{2}{1+c'} \cdot \frac{2}{1+c''}, \text{ etc.},$$

on aura

$$\mathrm{F}(c, \varphi) = \mathrm{H} \log \operatorname{tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi), \qquad (\varepsilon)$$

Si $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et qu'on nomme Φ' ce que devient alors l'angle Φ, on aura pour le cas de la fonction complète

$$\mathrm{F}(c) = \mathrm{H} \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\Phi').$$

Voilà donc la valeur de l'intégrale donnée exprimée en fonction d'une quantité logarithmique facile à calculer, multipliée par un coefficient constant, et la question proposée est par conséquent complètement résolue; mais on voit, d'après ce qui précède, qu'on peut encore exprimer d'une autre manière la valeur de cette même intégrale.

En effet, la suite croissante des modules c, c', c'', etc., qui a pour limite l'unité, peut être prolongée indéfiniment dans le sens opposé; elle sera alors décroissante et aura pour limite zéro. Désignons par c, $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., les différens termes de cette suite que nous supposerons liés entre eux par les équations

$$c = \frac{2\sqrt{c_{,}}}{1+c_{,}}, \quad c_{,} = \frac{2\sqrt{c_{,,}}}{1+c_{,,}}, \quad c_{,,} = \frac{2\sqrt{c_{,,,}}}{1+c_{,,,}}, \text{ etc.},$$

ou, ce qui revient au même, par les équations

$$c_{,} = \frac{1-b}{1+b}, \quad c_{,,} = \frac{1-b_{,}}{1+b_{,}}, \quad c_{,,,} = \frac{1-b_{,,}}{1+b_{,,}}, \text{ etc.}$$

Nommons $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, $\varphi_{,,,}$, etc., les amplitudes correspondantes aux modules $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., et déterminons leurs valeurs par les équations

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang}(\varphi_{,} - \varphi) = b \,\text{tang}\,\varphi, \\ \text{tang}(\varphi_{,,} - \varphi_{,}) = b' \,\text{tang}\,\varphi_{,}, \\ \text{tang}(\varphi_{,,,} - \varphi_{,,}) = b'' \,\text{tang}\,\varphi_{,,}, \\ \text{etc.};\end{array}\right\} (n)$$

on formera ainsi une suite de fonctions $F(c, \varphi)$, $F(c_{,}, \varphi_{,})$, $F(c_{,,}, \varphi_{,,})$, etc., qui seront entre elles dans des rapports constans, en sorte qu'on aura

$$F(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{2}{1+c_{,}} F(c, \varphi),$$

$$F(c_{,,}, \varphi_{,,}) = \frac{2}{1+c_{,,}} F(c_{,}, \varphi_{,}) = \frac{2}{1+c_{,}} \cdot \frac{2}{1+c_{,,}} F(c, \varphi),$$

$$F(c_{,,,}, \varphi_{,,,}) = \frac{2}{1+c_{,,,}} F(c_{,,}, \varphi_{,,}) = \frac{2}{1+c_{,}} \cdot \frac{2}{1+c_{,,}} \cdot \frac{2}{1+c_{,,,}} F(c, \varphi),$$

etc.

Les modules $c_{,}$, $c_{,,}$, $c_{,,,}$, etc., décroissent très rapidement, et s'approchent promptement de leur limite zéro. Or, dans le cas où c est supposé très petit, on a à fort peu près, $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = \int d\varphi = \varphi$;

en nommant donc Φ l'amplitude correspondante au module auquel on s'arrête, et en faisant

$$H' = \frac{1+c_{,}}{2} \cdot \frac{1+c_{,,}}{2} \cdot \frac{1+c_{,,,}}{2} \text{ etc.},$$

on aura

$$F(c, \varphi) = H'\Phi. \qquad (\theta)$$

Lorsqu'on suppose $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ les équations (η) donnent $\varphi_{,} = \pi$, $\varphi_{,,} = 2\pi$, $\varphi_{,,,} = 4\pi \ldots \varphi_n = 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi$, etc.; Φ désignant donc la limite de ces angles, si l'on fait

$$K = (1 + c_{,})(1 + c_{,,})(1 + c_{,,,}), \text{ etc.}, \qquad (\varkappa)$$

on aura pour le cas des fonctions complètes

$$F(c) = K\frac{\pi}{2}. \qquad (\lambda)$$

Ainsi donc il y aura toujours deux manières d'exprimer une fonction elliptique de première espèce, dont le module et l'amplitude sont donnés, par des arcs de cercle, au moyen de la formule (θ), ou par logarithmes au moyen de la formule (ε). On choisira la première ou la seconde de ces formules, selon que le carré du module c^2 de la fonction primitive s'approchera davantage de l'une des deux limites zéro ou l'unité, afin de diminuer autant que possible le nombre des transformées; et de cette manière on n'aura jamais à calculer qu'un petit nombre de modules et d'amplitudes correspondantes, pour arriver à une valeur suffisamment exacte de l'intégrale cherchée.

La même méthode d'approximation s'applique aux fonctions de la seconde espèce, mais les formules deviennent plus compliquées à cause de la quantité algébrique qu'elles renferment; cependant, comme

cette partie disparaît dans le cas des fonctions complètes, et que dans les applications que nous ferons de cette théorie nous n'aurons que de pareilles fonctions à considérer, nous traiterons ici ce cas particulier, et les formules que nous obtiendrons seront encore assez simples.

La formule (μ) donne la suivante :

$$E(c,\varphi) = \frac{1}{1+c'} E(c_{\prime},\varphi_{\prime}) - \frac{1-c_{\prime}}{2} F(c_{\prime},\varphi_{\prime}) + \frac{c_{\prime}\sin\varphi_{\prime}}{1+c_{\prime}}. \qquad (o)$$

Les valeurs des fonctions $E(c_{\prime}, \varphi_{\prime})$, $E(c_{\prime\prime}, \varphi_{\prime\prime})$, etc., seront données par des équations semblables ; on pourrait donc en déduire la valeur de l'intégrale $E(c,\varphi)$, en fonction de celles de ces quantités qu'on voudra choisir, mais la réduction de la formule à laquelle on parviendrait de cette manière serait pénible; il vaut mieux, pour l'éviter, mettre sous une autre forme la formule précédente. Soit généralement $G(c,\varphi)=E(c,\varphi)-F(c,\varphi)$, on trouvera, en vertu de l'équation (o),

$$G(c,\varphi) = \frac{1}{1+c_{\prime}} [G(c_{\prime},\varphi_{\prime}) - c_{\prime}F(c_{\prime},\varphi_{\prime}) + c_{\prime}\sin\varphi_{\prime}] ;$$

et par des transformations semblables, on trouvera

$$G(c_{\prime}, \varphi_{\prime}) = \frac{1}{1+c_{\prime\prime}} [G(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime}) - c_{\prime\prime}F(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime}) + c_{\prime\prime}\sin\varphi_{\prime\prime}],$$

$$G(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime}) = \frac{1}{1+c_{\prime\prime\prime}} [G(c_{\prime\prime\prime},\varphi_{\prime\prime\prime}) - c_{\prime\prime\prime}F(c_{\prime\prime\prime},\varphi_{\prime\prime\prime}) + c_{\prime\prime\prime}\sin\varphi_{\prime\prime\prime}],$$

etc.

Au moyen de ces équations on déterminera par des substitutions successives la valeur de $G(c,\varphi)$ en

fonction des quantités $G(c_{\prime},\varphi_{\prime})$, $G(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime})$ des fonctions $F(c_{\prime},\varphi_{\prime})$, $F(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime})$, et de quantités algébriques.

Supposons qu'on ait calculé la suite des quantités $G(c,\varphi)$, $G(c_{\prime},\varphi_{\prime})$, etc., jusqu'au terme $G(c_i,\varphi_i)$ correspondant au module c_i que nous regarderons comme assez petit pour être négligé, on aura $\sqrt{1-c_i^2\sin^2\varphi_i}=1$, et par suite $E(c_i,\varphi_i)=F(c_i,\varphi_i)=\int d\varphi'=\Phi$. En nommant comme précédemment Φ la limite des angles φ, $\varphi_{\prime}$, $\varphi_{\prime\prime}$, etc., on aura donc alors $G(c_i,\varphi_i)=0$. Si l'on suppose $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, on aura $\Phi=2^i\frac{1}{2}\pi$, et les angles $\varphi_{\prime}$, $\varphi_{\prime\prime}$, etc., seront tous des multiples de la demi-circonférence, ce qui fera disparaître la partie algébrique des équations précédentes. On aura donc, en substituant pour $F(c_{\prime},\varphi_{\prime})$, $F(c_{\prime\prime},\varphi_{\prime\prime})$ etc., leurs valeurs en $F(c,\varphi)$,

$$G'(c)=-F(c)\cdot\left[\frac{2c_{\prime}}{(1+c_{\prime})^2}+\frac{2}{(1+c_{\prime})^2}\cdot\frac{4c_{\prime\prime}}{(1+c_{\prime\prime})^2}+\frac{1}{(1+c_{\prime})^2}\cdot\frac{1}{(1+c_{\prime\prime})^2}\cdot\frac{8c_{\prime\prime\prime}}{(1+c_{\prime\prime\prime})^2}+\text{etc.}\right]$$

En mettant pour $G(c)$ sa valeur $E(c)-F(c)$, et en observant qu'on a

$$c^2=\frac{4c_{\prime}}{(1+c_{\prime})^2},\quad c_{\prime}^2=\frac{4c_{\prime\prime}}{(1+c_{\prime\prime})^2},\ \text{etc.},$$

on en conclura

$$E(c)=F(c)\left[1-\tfrac{1}{2}c^2\left(1+\tfrac{1}{2}c_{\prime}+\tfrac{1}{4}c_{\prime}c_{\prime\prime}+\text{etc.}\right)\right].$$

Ou bien en faisant, pour abréger,

$$L=1-\tfrac{1}{2}c^2\left(1+\tfrac{1}{2}c_{\prime}+\tfrac{1}{4}c_{\prime}c_{\prime\prime}+\text{etc.}\right),\qquad (\xi)$$

et en observant qu'on a $F(c) = K\frac{\pi}{2}$, on aura, pour le cas des fonctions complètes,

$$E(c) = KL\frac{\pi}{2}. \quad (\omega)$$

Cette formule peut s'appliquer non-seulement à des valeurs de c plus petites que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, mais même à des valeurs peu différentes de l'unité ; elle suffit donc pour tous les cas que l'on peut avoir à calculer. Cependant, si pour compléter cette théorie on veut voir ce que deviennent, par rapport aux fonctions de seconde espèce, les formules relatives à l'échelle ascendante des modules, reprenons l'équation (μ); en substituant pour $F(c,\varphi)$ sa valeur $\frac{2}{1+c}F(c',\varphi')$, elle donne la suivante :

$$E(c,\varphi) = (1+c)E(c',\varphi') + (1-c)F(c',\varphi') - c\sin\varphi,$$

et semblablement

$$E(c',\varphi') = (1+c')E(c'',\varphi'') + (1-c')F(c'',\varphi'') - c'\sin\varphi',$$
$$E(c'',\varphi'') = (1+c'')E(c''',\varphi''') + (1-c'')F(c''',\varphi''') - c''\sin\varphi'',$$

etc.

Soient $E(c^i,\varphi^i)$, $F(c^i,\varphi^i)$, les valeurs de $E(c,\varphi)$, $F(c,\varphi)$ correspondantes au module c^i que nous supposerons assez voisin de l'unité pour ne pas pousser plus loin la série, on aura

$$\sqrt{1 - c^{i2}\sin^2\varphi^i} = \cos\varphi^i;$$

par conséquent

$$E(c^i,\varphi^i) = \int \cos\varphi^i d\varphi^i = \sin\varphi^i,$$

$$F(c^i,\varphi^i) = \int \frac{d\varphi^i}{\cos\varphi^i} = \log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi^i\right).$$

Dans le cas des fonctions complètes il faut supposer $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et calculer les angles φ', φ'', etc., par les équations (ν); mais cette supposition ne ferait pas disparaître les quantités algébriques des formules précédentes. On ne peut supposer non plus $\varphi^i = \frac{1}{2}\pi$, parce qu'alors la valeur de $F(c^i, \varphi^i)$ deviendrait infinie; mais si l'on fait $\varphi^{i-1} = \frac{1}{2}\pi$, ce qui n'est sujet à aucun inconvénient, on trouvera, en remontant, $\varphi^{i-2} = 2\frac{\pi}{2}$, $\varphi^{i-3} = 4\frac{\pi}{2}, \ldots \varphi^{i-i'} = 2^{i'-1}\frac{\pi}{2} \ldots \varphi' = 2^{i-2}\frac{\pi}{2}$, $\varphi = 2^{i-1}\frac{\pi}{2}$. En substituant donc pour $F(c', \varphi')$, $F(c'', \varphi'')$, etc., leurs valeurs, et réduisant les expressions résultantes, en observant qu'on a généralement

$$1 - c^2 = b^2,\ (1 + c^2)^2 = \frac{b^2}{b'},$$

on trouvera

$$E(c,\varphi) = K'\left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2 b'}{4} + \frac{b^2 b' b''}{8} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{2^i}{K'}\sin\varphi^i - \frac{2^i}{K'}\cdot\frac{c^{i-1}}{1+c^{i-1}}.$$

Mais l'équation $\operatorname{tang}(\varphi^{i-1} - \varphi^i) = b^i \operatorname{tang}\varphi^i$, dans l'hypothèse de $\varphi^{i-1} = \frac{1}{2}\pi$, donne $\operatorname{tang}\varphi^i = \frac{1}{\sqrt{b^i}}$,

d'où l'on tire $\sin\varphi^i = \frac{1}{\sqrt{1+b^i}} = 1 - \frac{1}{2}b^i$, aux quantités près de l'ordre $(b^i)^2$ que l'on peut négliger, puisque l'on suppose à très peu près $c^i = 1$. On aura ainsi

$$\frac{2^i}{K'}\sin\varphi^i - \frac{2^i}{K^i}\cdot\frac{c^{i-1}}{1+c^{i-1}} = \frac{2^{i-1}}{K'}\left(2 - b^i - \frac{2c^{i-1}}{1+c^{i-1}}\right)$$
$$= \frac{2^{i-1}}{K'}\left(2 - \frac{1-c^{i-1}}{1+c^{i-1}} - \frac{2c^{i-1}}{1+c^{i-1}}\right) = \frac{2^{i-1}}{K'}.$$

On a d'ailleurs

$$E(c,\varphi) = E\left(c, 2^{i-1}\frac{\pi}{2}\right) = 2^{i-2}E(c).$$

En faisant donc

$$L' = b^2\left(1 + \frac{b'}{2} + \frac{b'b''}{4} + \frac{b'b''b'''}{8} + \text{etc.}\right),$$

on aura pour le cas de la fonction complète :

$$E(c) = \frac{K'L'}{2^i}\log\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi^i\right) + \frac{1}{K'}.$$

Cette formule s'applique au cas où le module est peu différent de l'unité ; elle suppose seulement que l'on a poussé la série des modules assez loin pour que $(b^i)^2$ soit une quantité négligeable, ce qui permet de faire $c^i = 1$.

La suite des quantités croissantes c, c', c'', etc., dont la limite est l'unité et la suite des quantités décroissantes $c_{\prime}$, $c_{\prime\prime}$, $c_{\prime\prime\prime}$, etc., dont la limite est zéro, n'en forment qu'une seule liée par la même loi et qu'on peut écrire ainsi.

limite $0 \ldots\ldots c_{\prime\prime\prime}, c_{\prime\prime}, c_{\prime}, c, c', c'', c''' \ldots\ldots$ limite 1.

Cette suite, qui peut être prolongée indéfiniment

dans les deux sens, est ce qu'on appelle une échelle des modules, et l'on voit que les fonctions $F(c, \varphi)$, $E(c, \varphi)$ peuvent être transformées en une infinité d'autres fonctions de même espèce, qui auront pour modules les différens termes de cette échelle.

La précédente échelle a d'abord été découverte par Lagrange; la loi de sa formation est très simple; mais cette loi peut varier, et par conséquent il peut exister différentes échelles de modules pour la même fonction elliptique. Long-temps après Lagrange, Legendre en découvrit une seconde dont la loi est plus compliquée, mais qui jouit de propriétés analogues. Enfin, dans ces derniers temps, on a démontré qu'on pouvait former une infinité d'échelles de modules, à chacune desquelles correspondra par conséquent une infinité de transformations diverses de la même fonction elliptique en d'autres fonctions de même espèce, dont les modules seront tous déterminables par des opérations algébriques. La démonstration de cette belle propriété des fonctions elliptiques fait l'objet du célèbre théorème dû à M. Jacobi, dont les travaux, ainsi que ceux de son émule l'ingénieux Abel, trop tôt ravi aux sciences, ont donné tout à coup un nouvel essor à cette branche d'analyse au moment où on la croyait épuisée. Cependant, tout en rendant justice aux savantes recherches de ceux qui, après Lagrange, se sont occupés de la théorie des fonctions elliptiques, nous devons dire que sous le rapport du calcul pratique de ces fonctions, qui est le véritable but que l'on doit se proposer, leurs travaux n'ont rien ajouté aux résultats obtenus par ce grand géo-

mètre. En effet, cette multitude d'échelles de modules dont ils ont démontré l'existence, en permettant de varier à l'infini les transformations des mêmes fonctions, a conduit à la découverte d'un grand nombre de propriétés neuves et intéressantes dont s'est enrichie l'analyse ; mais relativement à l'intégration de ces fonctions, elle n'a fait que reproduire sous des formes diverses la même méthode d'approximation, sans conduire à aucune intégrale nouvelle ; et comme de toutes les échelles celle de Lagrange est la plus simple et la plus facile à former, c'est en définitive à celle-ci qu'il faudra recourir toutes les fois qu'on voudra calculer numériquement les fonctions elliptiques qui se présentent dans un grand nombre de questions de Géométrie, de Mécanique ou d'Astronomie. Legendre est donc, après Lagrange, celui qui a rendu le plus important service à cette partie du calcul intégral ; il a fait pour les fonctions elliptiques ce que les successeurs de Neper avaient fait pour les fonctions logarithmiques et trigonométriques ; il a construit des tables au moyen desquelles on peut, dans chaque cas, trouver la valeur numérique de toute fonction donnée avec toute la précision désirable, sans être obligé pour cette recherche à des calculs laborieux. Le secours de ces tables rend l'emploi des fonctions elliptiques d'une application aussi facile que celui des fonctions logarithmiques et circulaires. Ce travail, moins brillant sans doute que tant d'autres du même auteur, est celui qui doit peut-être lui mériter le plus la reconnaissance des géomètres, par les soins qu'il a exigés et par son utilité.

Nous aurons plusieurs fois, dans la suite de cet ouvrage, l'occasion d'en faire usage.

23. Reprenons les valeurs des deux quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ et $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ qui nous restent à déterminer. D'après la formule (1) on aura

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}},$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}.$$

Il y a plusieurs moyens de ramener ces deux intégrales à la forme des fonctions elliptiques. Soit $\sin(\varphi+\theta) = \alpha\sin\theta$, d'où l'on tire

$$\cos(\varphi+\theta) = \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}.$$

Faisons pour abréger $\Delta = \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}$, ces deux équations donnent en différentiant

$$d\varphi = \frac{d\theta(\alpha\cos\theta-\Delta)}{\Delta}.$$

En vertu des mêmes équations on a d'ailleurs

$$\cos\varphi = \alpha\sin^2\theta + \cos\theta\,\Delta.$$

et par suite

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \sqrt{\alpha^2\cos^2\theta - 2\alpha\cos\theta\,\Delta + \Delta^2}$$
$$= \alpha\cos\theta - \Delta.$$

On aura donc

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}} = \frac{d\theta}{\Delta},$$

$$\frac{d\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}} = \frac{d\theta(\alpha\sin^2\theta+\cos\theta\Delta)}{\Delta}.$$

Si l'on intègre ces deux formules en observant que $\alpha^2\sin^2\theta = 1 - \Delta^2$, et que l'intégrale $\int d\theta\cos\theta$ devant être étendue depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, ce terme est nul entre ces limites, les expressions de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$ et de $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ deviendront

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}},$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{\alpha\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta} - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}}\right).$$

Désignons par $F(\alpha)$ et $E(\alpha)$ les fonctions complètes de première et de seconde espèce relatives au module α, c'est-à-dire celles qui se rapportent à des intégrales prises entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2\theta}} = 4F(\alpha),$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta} = 4E(\alpha).$$

Les intégrales indiquées devant s'étendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$. On aura donc ainsi

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{4}{\pi} F(\alpha), \quad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{4}{\alpha\pi}[F(\alpha) - E(\alpha)]. \quad (18)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (5) du n° 19, après avoir fait $s = \frac{1}{2}$, $i = 0$, on aura pour déterminer les coefficiens $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$ et $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$,

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2E(\alpha) - (1 - \alpha^2)F(\alpha)}{(1 - \alpha^2)^2}\right], \quad b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = \frac{2\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(0)} - b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{1 + \alpha^2}. \quad (19)$$

et en faisant ensuite $s = \frac{3}{2}$ dans ces mêmes formules, on en déduira

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = \frac{3(1+\alpha^2)b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + 2\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{3(1-\alpha^2)^2}; \; b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = \frac{6\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + (1+\alpha^2)b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{3(1-\alpha^2)^2}. \quad (20)$$

Ces valeurs ainsi déterminées, on peut déduire facilement tous les autres coefficiens des fonctions $V^{-\frac{1}{2}}$, $V^{-\frac{3}{2}}$ et $V^{-\frac{5}{2}}$.

Il ne s'agira plus que de déterminer les quantités $F(\alpha)$ et $E(\alpha)$. Pour cela, si l'on veut les calculer directement, il faudra, conformément à ce qui précède, former la suite des modules décroissans $\alpha_{\prime}$, $\alpha_{\prime\prime}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}$, etc., jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une valeur peu différente de zéro; on en déduira les valeurs de K et L par les formules (x) et (ξ) n° 22, et en substituant ces deux quantités dans les formules (ω), on aura les valeurs de $F(\alpha)$ et $E(\alpha)$. Mais il sera plus simple de déterminer ces deux fonctions par le moyen des tables de Legendre.

Enfin, si l'on voulait faire dépendre comme dans le n° 51 du livre II, la détermination des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, etc., de celle des deux quantités $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ et $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, dont les développemens en série sont plus convergens, on aurait :

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2}$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2}.$$

Expressions qui, par des transformations très simples, se ramèneront à la forme des fonctions elliptiques.

Les formules précédentes sont, à ce qu'il me semble, les plus commodes que l'on puisse employer pour le calcul numérique des premiers coefficiens $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, etc., et cette manière de les déterminer me paraît à la fois plus simple et plus exacte que celle des séries. Elle réussit surtout lorsque α est une très petite quantité, en sorte que la quantité $1-\alpha$ ne diffère que très peu de l'unité, et l'on n'a besoin dans ce cas de calculer qu'un petit nombre de termes de la série $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}$, etc., pour arriver à des résultats aussi exacts qu'on peut le désirer. Lorsque la différence $1-\alpha$ est au contraire très petite, on est obligé de pousser plus loin la série des modules; mais le nombre qu'il en faut calculer n'est jamais bien considérable; et d'ailleurs la théorie des fonctions elliptiques offre alors des moyens de profiter de cette circonstance même, pour simplifier les calculs et rendre les approximations plus rapides. On peut aussi alors faire usage des formules relatives à la suite ascendante des modules et l'on doit remarquer en outre qu'alors α étant supposé très peu différent de l'unité, ce cas est celui où l'on ne peut employer la méthode des séries à cause de leur peu de convergence.

Enfin, comme nous l'avons dit, des tables très exactes ayant été construites pour les fonctions elliptiques, on pourra déterminer par leur moyen, presque immédiatement et sans aucun calcul, les valeurs des quantités $F(\alpha)$ et $E(\alpha)$, quel que soit le module α,

et les valeurs des coefficiens $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, s'en déduiront par les formules (18) et (19).

Pour appliquer ce procédé à un exemple particulier, supposons qu'il s'agisse de développer les trois fonctions $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-2\alpha\cos\alpha+\varphi^2)^{-\frac{3}{2}}$ et $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{5}{2}}$, relatives à l'action réciproque de Jupiter et de Saturne. On aura dans ce cas

$$\alpha = 0,54531024,$$

et par les tables des fonctions elliptiques on trouve relativement à cette valeur du module

$$F(\alpha) = 1,71235057; \; F(\alpha) = 1,44654231.$$

Ces valeurs, substituées dans les formules (18), donnent

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2.18023246,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0.62063300,$$

d'où l'on conclut

$$b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 4.35828700,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3.18538554,$$

et par suite

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 13.7985000,$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 12.4180486.$$

Au moyen de ces valeurs on pourra déterminer, par les formules du n° 21, le coefficient de l'un quelconque des termes du développement en séries des trois fonctions $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$ et $(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{5}{2}}$, quel que soit l'ordre de ce terme.

24. Connaissant par ce qui précède les valeurs des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(2)}$, etc., $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(2)}$, etc., $b_{\frac{5}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(2)}$, etc., et de leurs coefficiens différentiels successifs, il sera facile d'en conclure les valeurs des quantités $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc., $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, etc., $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, etc., et de leurs différences successives tant par rapport à a que par rapport à a'. En effet, nous avons supposé

$$(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a\cos\varphi}{a'^2} = \frac{1}{2}A^{(0)} + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \text{etc.},$$

et en faisant $\alpha = \frac{a}{a'}$,

$$(1 - 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(0)} + b_{\frac{1}{2}}^{(1)}\cos\varphi + b_{\frac{1}{2}}^{(2)}\cos 2\varphi + \text{etc.}$$

On aura donc généralement, en comparant ces deux séries,

$$A^{(i)} = \frac{1}{a'} \cdot b_{\frac{1}{2}}^{(i)}, \quad (21)$$

et dans le cas de $i = 1$,

$$A^{(1)} = \frac{1}{a'}\left(b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \alpha\right).$$

En différentiant ces valeurs et en observant qu'on a $\frac{d\alpha}{da} = \frac{1}{a'}$, on aura

$$\frac{dA^{(i)}}{da} = \frac{1}{a'^2} \cdot \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha},$$

et pour le cas de $i = 1$

$$\frac{dA^{(1)}}{da} = \frac{1}{a'^2} \cdot \left(\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} - 1\right).$$

En différentiant de nouveau, on trouvera dans le cas même où $i = 1$

$$\frac{d^2A^{(i)}}{da^2} = \frac{1}{a'^3} \cdot \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2},$$

$$\frac{d^3A^{(i)}}{da^3} = \frac{1}{a'^4} \cdot \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}.$$

etc.

D'où l'on conclura généralement

$$a^m \frac{d^mA^{(i)}}{da^m} = \frac{1}{a'} \cdot \alpha^m \frac{d^mb_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^m}.$$

Le cas où l'on a à la fois $m = 1$ et $i = 1$ étant seul excepté.

De même nous avons supposé

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{a'^3} = \frac{1}{2} B^{(0)} + B^{(1)} \cos\varphi + B^{(2)} \cos 2\varphi + \text{etc.},$$

$$(a^2 - 2aa' \cos\varphi + a'^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} C^{(0)} + C^{(1)} \cos\varphi + C^{(2)} \cos 2\varphi + \text{etc.},$$

etc.;

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\,b_{\frac{3}{2}}^{(0)}+b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\cos\varphi+b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\cos 2\varphi+\text{etc.},$$

$$(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\,b_{\frac{5}{2}}^{(0)}+b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\cos\varphi+b_{\frac{5}{2}}^{(2)}\cos 2\varphi+\text{etc.}$$

On aura donc en général

$$B^{(i)}=\frac{1}{a'^3}.b_{\frac{3}{2}}^{(i)} \quad \text{et} \quad C^{(i)}=\frac{1}{a'^5}.b_{\frac{5}{2}}^{(i)}\;;$$

et dans le cas de $i=0$,

$$B^{(0)}=\frac{1}{a'^3}\left(b_{\frac{3}{2}}^{(0)}-2\right).$$

En différentiant successivement ces valeurs, on en conclura généralement

$$a^m\,\frac{d^mB^{(i)}}{da^m}=\frac{1}{a'^3}\,.\,\alpha^m\,\frac{d^mb_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^m},$$

$$a^m\,\frac{d^mC^{(i)}}{da^m}=\frac{1}{a'^5}\,.\,\alpha^m\,\frac{d^mb_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha^m}.$$

L'emploi des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, etc., $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, etc., $b_{\frac{5}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(1)}$, etc., a l'avantage d'introduire de l'uniformité dans les formules, et de simplifier les calculs, parce ces quantités et leurs différences relatives à α servent à la fois à la détermination des inégalités des deux planètes troublées par leur action réciproque. Il conviendra donc d'introduire ces quantités et leurs différences dans le développement de la fonction R, à la place des quantités $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, etc., $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, etc., $C^{(0)}$, $C^{(1)}$, etc., et de leurs différences relatives, soit à a, soit à a'. Cette opération sera facile, au moyen

des formules précédentes, lorsque les différences relatives à a' auront été converties en différences relatives à a par les formules du n° 52 du livre II, qu'on peut prolonger aussi loin qu'on voudra, c'est ce que nous avons fait dans le n° 6 et suivans. On peut d'ailleurs, pour éviter toute opération inutile, exprimer de suite les différences relatives à a' en fonction des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, etc., $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, etc., $b_{\frac{5}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(1)}$, etc., et de leurs différences; on les obtiendra très aisément par la différentiation successive de l'équation (21).

25. La méthode par laquelle nous avons ramené à la forme d'intégrales définies les expressions des divers coefficiens du développement de la fonction $(a^2 - 2aa'\cos\varphi + a'^2)^{-s}$ s'appliquerait de même au développement de toute fonction donnée, en série de fonctions périodiques de la variable, du moment qu'on est d'avance assuré que cette fonction peut être exprimée par une semblable série.

Si les intégrales indiquées peuvent s'obtenir, elles donneront, sous forme finie, l'expression des coefficiens du développement de la fonction proposée. Si l'intégration est impossible par les méthodes directes, comme l'expression de chaque coefficient est donnée sous la forme de quadratures, on pourra toujours en déterminer la valeur par les méthodes d'approximation connues, avec tel degré d'exactitude qu'on voudra. Dans tous les cas, cette expression indiquera les relations qui lient ce coefficient à ceux qui le précèdent, et ramènera, par conséquent, leur détermina-

tion générale à celle d'un petit nombre d'entre eux.

Cette manière de former le développement d'une fonction peut être principalement utile quand chacun de ses coefficiens est lui-même exprimé par une série infinie; en sorte qu'on ne saurait avoir sa valeur exacte par aucune autre méthode. C'est ainsi, par exemple, que dans les formules du mouvement elliptique chacun des coefficiens des séries qui expriment le rayon vecteur et la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, forme une suite ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de l'excentricité de l'orbite. Lorsqu'on veut réduire ces expressions en nombre, il est donc bon d'avoir le moyen de calculer ces coefficiens par des formules indépendantes des excentricités, et qui indiquent clairement le degré de petitesse des quantités négligées.

Mais c'est surtout dans la théorie des perturbations planétaires que l'emploi de cette méthode pourrait être d'une grande utilité, car les coefficiens des différens termes du développement de la fonction perturbatrice, en sinus et cosinus des multiples des moyens mouvemens de la planète troublée et de la planète perturbatrice, étant également des séries ordonnées par rapport aux excentricités et aux inclinaisons n° 4, si l'on parvenait à évaluer ces coefficiens par le moyen des quadratures paraboliques, non-seulement on éviterait les pénibles calculs qu'exige le développement de cette fonction, mais encore on arriverait, dans la recherche des inégalités planétaires,

à des résultats beaucoup plus certains que ceux qu'on obtient par les méthodes ordinaires, parce qu'on n'est jamais bien assuré que quelque circonstance particulière ne rendra pas sensibles des inégalités dépendantes des puissances des excentricités et des inclinaisons qu'on a cru pouvoir négliger.

On a donc dû chercher à étendre la méthode précédente au cas où la fonction qu'il s'agit de développer renferme à la fois deux variables, et où la série qui l'exprime doit être une suite de sinus et de cosinus des multiples de ces variables. Supposons, en général, la fonction R développée en une suite de termes périodiques de la forme

$$K_{i,i'} \cos(i\varphi - i'\varphi') + K'_{i,i'} \sin(i\varphi - i'\varphi'),$$

dans lesquels φ et φ' représentent les anomalies moyennes de la planète troublée et de la planète perturbatrice, i et i' deux nombres entiers qui peuvent avoir toutes les valeurs positives ou négatives, y compris zéro. En n'ayant égard qu'à ces termes, on aura

$$R = K_{i,i'} \cos(i\varphi - i'\varphi') + K'_{i,i'} \sin(i\varphi - i'\varphi').$$

Si l'on multiplie successivement par....... $\cos(i\varphi + i'\varphi')\,d\varphi\,d\varphi'$ et par $\sin(i\varphi + i'\varphi')\,d\varphi\,d\varphi'$ les deux membres de cette équation, et qu'on intègre entre les limites o et 2π, il est aisé de voir que tous les termes du développement de R dépendant d'un argument différent de $i\varphi - i'\varphi'$ disparaîtront d'eux-mêmes ; en sorte qu'on aura

$$K_{i,i'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\cos(i\varphi - i'\varphi')\, d\varphi\, d\varphi',$$

$$K'_{i,i'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\sin(i\varphi - i'\varphi')\, d\varphi\, d\varphi';$$

les intégrales devant être prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et depuis $\varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi' = 2\pi$.

Si l'on désigne, comme nous le faisons, par F le premier terme du développement de R, ou celui qui répond au cas où l'on fait à la fois $i = 0$ et $i' = 0$, cette formule devient

$$F = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, d\varphi\, d\varphi'.$$

Les coefficiens du développement de la fonction R se trouveront donc ainsi exprimés au moyen d'intégrales définies doubles, et il ne restera plus qu'à chercher les méthodes les plus simples, pour en déterminer les valeurs approchées avec le plus d'exactitude possible.

Cette manière d'exprimer les coefficiens du développement en série de la fonction perturbatrice, n'est qu'une extension du procédé employé par D'Alembert pour calculer les valeurs de ces coefficiens relatifs aux termes indépendans des excentricités et des inclinaisons, ce qui réduit les expressions de $K_{i,i'}$ et $K'_{i,i'}$ à des intégrales simples prises par rapport à φ et φ'. M. Poisson, en l'indiquant pour la première fois, concevait en même temps l'espoir que par quelque artifice d'analyse on parviendrait à réduire ces intégrales doubles à la forme d'intégrales simples; mais il ne paraît pas qu'on y ait réussi jusqu'ici, et le seul

moyen qui se présente pour les calculer, est d'étendre à deux variables la méthode des quadratures paraboliques. Cette méthode consiste, comme on sait, à regarder l'intégrale dont on veut déterminer la valeur, comme l'aire d'une portion de courbe parabolique comprise entre des limites données, et à partager ensuite cette aire en un assez grand nombre de parties pour que chacune d'elles, regardée comme un petit trapèze curviligne sur l'un de ses côtés, puisse se déterminer, aussi exactement qu'on le voudra, par les moyens du calcul différentiel : la somme de tous ces trapèzes sera la valeur de l'intégrale cherchée.

Supposons donc le cas où la fonction qu'il s'agit d'intégrer comprend deux ou un plus grand nombre de variables. Soit, par exemple, $\int y dx dz$ une intégrale quelconque dont il faut trouver la valeur approchée entre des limites assignées à x et à z, en supposant y une fonction connue de ces deux variables ; en sorte qu'on ait $y =$ fonct. (x, z). On pourra regarder y comme l'une des trois coordonnées d'une surface parabolique dont les deux autres coordonnées sont x et z ; et la question consistera, par conséquent, à cuber le solide compris entre cette surface, le plan des xz, et les plans menés parallèlement à ceux des xy et des yz, aux limites des coordonnées x et z. Nous prendrons pour ces limites $x = 0$, $x = a$ et $z = 0$, $z = b$, et nous supposerons que pour les deux premières valeurs de x et de z on ait $\int y dx dz = 0$; ce qui est permis, puisqu'on peut toujours placer l'origine des coordonnées au point où commence le solide cherché, et

faire, par conséquent, que x et y s'évanouissent en même temps que l'intégrale $\int y dx dz$.

Nous supposerons en outre, conformément à ce qui a été dit nº 34, livre III, que dans l'intervalle compris entre les limites $x=0$ et $x=a$, $z=0$ et $z=b$, l'ordonnée y reste toujours de même signe, de manière que le solide qu'on veut cuber soit compris tout entier du même côté du plan des xy; s'il en était autrement, il faudrait chercher successivement les différentes parties du solide, situées soit au-dessus, soit au-dessous du plan des xy, et retrancher la somme de celles qui sont comprises dans un sens de la somme de celles qui sont comprises dans l'autre.

Enfin, nous supposerons que dans l'intervalle compris entre les limites assignées à l'intégrale, la courbure de la surface n'éprouve aucune variation de nature à rendre infini l'un des coefficiens différentiels $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.

Cela posé, divisons en n parties égales l'un des côtés de la base du solide que nous voulons évaluer; soit ω' l'une de ces parties, en sorte qu'on ait $b=n\omega'$. Si l'on mène par chacun des points de division des plans parallèles à celui des xy, on pourra regarder le solide cherché comme étant la somme de tous les petits solides curvilignes dont la base est $\omega'a$. Divisons de même le côté a en m parties égales, soit $a=m\omega$; par chacun des points de division menons des plans parallèles à celui des yz : il est évident qu'on pourra considérer le solide représenté par l'intégrale $\int y dx dz$ comme étant la somme de tous les petits parallélépi-

8..

pèdes curvilignes dont la base commune est $\omega\omega'$, et dont les hauteurs sont les valeurs que prendra z lorsqu'on y fera simultanément $z=0$ et $x=0$, $x=\omega$, $x=2\omega$, $x=3\omega$, etc., jusqu'à $x=(m-1)\omega$; puis $z=\omega'$, et de même $x=0$, $x=\omega$, $x=2\omega$, etc., jusqu'à $x=(m-1)\omega$, et ainsi de suite jusqu'à $z=(n-1)\omega'$ et $x=0$, $x=\omega$, etc.; c'est-à-dire que comme nous avons supposé $y=F(x, z)$, si l'on désigne généralement par $Y_{i,i'}$, ce que devient y lorsqu'on fait simultanément $x=i\omega$, $z=i'\omega'$, les valeurs successives de y seront

$$Y_{0,0}=F(0,0),\ Y_{1,0}=F(\omega,0),\ldots\ Y_{m-1,0}=F[(m-1)\omega,\ 0],$$
$$Y_{0,1}=F(0,\omega'),\ Y_{1,1}=F(\omega,\omega'),\ldots\ Y_{m-1,1}=F[(m-1)\omega,\ \omega'],$$
$$Y_{0,2}=F(0,2\omega'),\ Y_{1,2}=F(\omega,2\omega'),\ldots\ Y_{m-1,2}=F[(m-1)\omega,2\omega'],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y_{0,n-1}=F[0,(m-1)\omega'],\quad Y_{1,n-1}=F(\omega,n-1)\omega'],$$
$$Y_{2,n-1}=F[(2\omega,(n-1)\omega']\ldots Y_{m-1,n-1}=F(m-1)\omega,(n-1)\omega'].$$

La valeur approchée du premier solide sera égale à $\omega\omega' Y_{0,0}$, celle du second à $\omega\omega' Y_{1,0}$, et ainsi de suite; on aura donc pour la somme de tous ces solides, ou pour la première valeur approchée de l'intégrale cherchée :

$$\begin{aligned}\int y\,dx\,dz = &\ \omega\omega'(Y_{0,0}+Y_{1,0}+Y_{2,0}\ldots\ldots+Y_{m-1,0})\\ &+\omega\omega'(Y_{0,1}+Y_{1,1}+Y_{2,1}\ldots\ldots+Y_{m-1,1})\\ &+\omega\omega'(Y_{0,2}+Y_{1,2}+Y_{2,2}\ldots\ldots+Y_{m-1,2})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\omega\omega'(Y_{0,n-1}+Y_{1,n-1}+Y_{2,n-1}\ldots+Y_{m-1,n-1}).\end{aligned}$$

On peut encore, en commençant par les derniers solides dans lesquels nous avons décomposé le cube

représenté par $\int ydxdz$, regarder ce cube comme la somme de tous les petits parallélépipèdes curvilignes dont la base commune est $\omega\omega'$, et dont la hauteur est la valeur que prend z lorsqu'on y suppose simultanément $z = n\omega'$ et $x = m\omega$, $x = (m-1)\omega$, etc., jusqu'à $x = \omega$, et ainsi de suite, en remontant jusqu'à $z = \omega'$ et $x = m\omega$, $x = (m-1)\omega \ldots x = \omega$. On trouvera ainsi une nouvelle expression de l'intégrale cherchée; la première représentait la somme des petits parallélépipèdes inscrits au solide qu'on veut évaluer, la seconde sera celle des petits parallélépipèdes qui y sont circonscrits. En prenant donc la demi-somme de ces deux expressions, et en observant que l'on a de la même manière, en ne considérant que les deux tranches extrêmes du solide,

$$\begin{aligned} &\omega\omega'(Y_{0,0} + Y_{1,0} + Y_{2,0} \ldots + Y_{m-1,0}) \\ &= \omega\omega'(\tfrac{1}{2}Y_{0,0} + Y_{1,0} + Y_{2,0} \ldots + Y_{m-1,0} + \tfrac{1}{2}Y_{m,0}), \\ &\omega\omega'(Y_{1,n} + Y_{2,n} + Y_{3,n} \ldots + Y_{m,n}) \\ &= \omega\omega'(\tfrac{1}{2}Y_{0,n} + Y_{1,n} + Y_{2,n} \ldots + Y_{m-1,n} + \tfrac{1}{2}Y_{m,n}), \end{aligned}$$

on trouvera pour l'expression de $\int ydxdz$ plus approchée de la précédente

$$\left.\begin{aligned} \int ydxdz = &\frac{\omega\omega'}{2}.\left(\frac{1}{2}Y_{0,0} + Y_{1,0} + Y_{2,0} \ldots + Y_{m-1,0} + \frac{1}{2}Y_{m,0}\right), \\ &+ \omega\omega'.\left(\frac{1}{2}Y_{0,1} + Y_{1,1} + Y_{2,1} \ldots + Y_{m-1,1} + \frac{1}{2}Y_{m,1}\right), \\ &+ \omega\omega'.\left(\frac{1}{2}Y_{0,2} + Y_{1,2} + Y_{2,2} \ldots + Y_{m-1,2} + \frac{1}{2}Y_{m,2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{\omega\omega'}{2}.\left(\frac{1}{2}Y_{0,n} + Y_{1,n} + Y_{2,n} \ldots + Y_{m-1,n} + Y_{m,n}\right). \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Cette formule représentera d'autant plus exactement la valeur de l'intégrale $\int y dx dz$, que le nombre des parties dans lesquelles on aura divisé a et b sera plus considérable, puisqu'il est évident qu'en multipliant le nombre des parallélépipèdes élémentaires leur somme approchera davantage du solide cherché. On a donc ainsi un moyen de calculer l'intégrale $\int y dx dz$ avec toute la précision qu'on pourra désirer; on pourrait d'ailleurs déterminer analytiquement la correction qu'on doit appliquer à la formule précédente, pour avoir une valeur plus exacte de l'intégrale qu'elle représente; mais comme cette formule de correction serait très compliquée, et qu'on en ferait bien rarement usage dans la pratique, nous ne nous y arrêterons pas ici.

Appliquons maintenant les considérations précédentes au calcul des formules

$$K_{i,i'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\cos(i\varphi - i'\varphi')\, d\varphi d\varphi',$$

$$K'_{i,i'} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\sin(i\varphi - i'\varphi')\, d\varphi d\varphi',$$

où les doubles intégrales doivent être prises depuis φ et φ' égaux à zéro, jusqu'à φ et φ' égaux à 2π.

Si l'on suppose

$$A = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\cos i\varphi \cos i'\varphi' d\varphi d\varphi',$$

$$B = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\sin i\varphi \sin i'\varphi' d\varphi d\varphi',$$

$$C = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\sin i\varphi \cos i'\varphi' d\varphi d\varphi',$$

$$D = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\cos i\varphi \sin i'\varphi' d\varphi d\varphi'.$$

Les intégrales étant prises dans les mêmes limites que les précédentes, il est clair qu'on aura $K_{i,i'}=A+B$ et $K'_{i,i'}=C-D$; on aura par conséquent les valeurs de $K_{i,i'}$ et de $K'_{i,i'}$, dès qu'on connaîtra celles de A, B, C et D. Occupons-nous donc de calculer ces quatre quantités.

Commençons par la première. Si l'on veut comparer son expression à celle de l'intégrale générale $\int y dx dz$, il faudra supposer $\varphi = x$, $\varphi' = z$ et $y = F(x, z) = R \cos i\varphi \cos i'\varphi'$. Les intégrales relatives à φ et φ' devant être prises depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et depuis $\varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi' = 2\pi$, si l'on suppose la circonférence entière divisée en m parties égales, qu'on substitue successivement $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, $\varphi = 2 . \frac{2\pi}{m}$, $\varphi = 3 . \frac{2\pi}{m}$, etc., à la place de φ dans R; qu'on suppose ensuite la circonférence divisée en n parties égales, qu'on fasse successivement $\varphi' = \frac{2\pi}{n}$, $\varphi' = 2 . \frac{2\pi}{n}$, $\varphi' = 3 . \frac{2\pi}{n}$, etc., dans R, et qu'on désigne en général par $R_{\lambda,\lambda'}$ la valeur de cette fonction correspondante à la supposition que l'on a simultanément $\varphi = \lambda . \frac{2\pi}{m}$ et $\varphi' = \lambda' . \frac{2\pi}{n}$, d'après les notations précédemment adoptées, on aura généralement

$$Y_{\lambda,\lambda'} = R_{\lambda,\lambda'} \cos\left(i\lambda \frac{2\pi}{m}\right) \cos\left(i'\lambda' \frac{2\pi}{n}\right).$$

La formule (A), en y supposant $\omega = \frac{2\pi}{m}$ et

$\varpi' = \frac{2\pi}{n}$, et en faisant pour abréger $\alpha = i\,\frac{2\pi}{m}$ et $\alpha' = i'\,\frac{2\pi}{n}$, donnera donc ainsi:

$$A = \frac{1}{2mn}.\cos o.\left(\frac{1}{2}R_{0,0}\cos o + R_{1,0}\cos\alpha + R_{2,0}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,0}\cos m\alpha\right)$$
$$+ \frac{1}{mn}.\cos\alpha'.\left(\frac{1}{2}R_{0,1}\cos o + R_{1,1}\cos\alpha + R_{2,1}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,1}\cos m\alpha\right)$$
$$+ \frac{1}{mn}.\cos 2\alpha'.\left(\frac{1}{2}R_{0,2}\cos o + R_{1,2}\cos\alpha + R_{2,2}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,2}\cos m\alpha\right)$$
....
$$+ \frac{1}{2mn}.\cos n\alpha'.\left(\frac{1}{2}R_{0,n}\cos o + R_{1,n}\cos\alpha + R_{2,n}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,n}\cos m\alpha\right).$$

Pour faire usage de cette formule, on commencera donc par calculer les quantités $R_{0,0}$, $R_{1,0}$, etc., ensuite on calculera les quantités suivantes:

$$P'_0 = \frac{1}{2}R_{0,0}\cos o + R_{1,0}\cos\alpha + R_{2,0}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,0}\cos m\alpha,$$
$$P'_1 = \frac{1}{2}R_{0,1}\cos o + R_{1,1}\cos\alpha + R_{2,1}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,1}\cos m\alpha,$$
....
$$P'_n = \frac{1}{2}R_{0,n}\cos o + R_{1,n}\cos\alpha + R_{2,n}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{m,n}\cos m\alpha;$$

et l'on aura enfin cette expression très simple,

$$A = \frac{1}{mn}.\left(\frac{1}{2}P'_0\cos o + P'_1\cos\alpha' + P'_2\cos 2\alpha' \ldots + \frac{1}{2}P'_n\cos n\alpha\right). \quad \text{(B)}$$

En changeant dans les expressions de P'_0, P'_1, etc., et dans celle de A les cosinus en sinus, on aura la valeur de l'intégrale que nous avons représentée par B, et l'on trouverait aisément des formules semblables pour déterminer les valeurs de C et D.

Si l'on nomme F le premier terme ou la partie constante du développement de R, on aura

$$F = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,d\varphi\,d\varphi'.$$

Ce terme répond à la supposition de $i=0$ et $i'=0$, ce qui donne $\alpha=0$ $\alpha'=0$. On aura donc pour la valeur de cette intégrale

$$F=\frac{1}{mn}\left(\frac{1}{2}P_0+P_1+P_2\ldots+P_{n-1}+\frac{1}{2}P_n\right). \quad (C)$$

En faisant, pour abréger,

$$P_0=\frac{1}{2}R_{0,0}+R_{1,0}+R_{2,0}\ldots+\frac{1}{2}R_{m,0},$$

$$P_1=\frac{1}{2}R_{0,1}+R_{1,1}+R_{2,1}\ldots+\frac{1}{2}R_{m,1},$$

....

$$P_n=\frac{1}{2}R_{0,n}+R_{1,n}+R_{2,n}\ldots+\frac{1}{2}R_{m,n}.$$

La valeur de F ainsi calculée est celle qu'il faudra substituer dans les équations différentielles qui déterminent la partie séculaire de la variation des élémens des orbites planétaires.

On voit donc qu'il sera toujours facile de déterminer par une suite d'opérations très simples les coefficiens de l'un quelconque des termes du développement de la fonction perturbatrice, du moment que l'on aura calculé la suite des quantités que nous avons désignées par $R_{0,0}$, $R_{0,1}$, etc.

Il nous reste à montrer comment se calculeront ces quantités.

Or, R étant la fonction qui représente l'action réciproque de deux planètes m et m', on a

$$R=m'\left(\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right).$$

Comme la partie $\frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$ est commune aux deux planètes, et qu'elle est celle qui entraîne les plus longs calculs, il sera bon de la calculer séparément, et de diviser ainsi la fonction R en deux parties. En n'ayant égard qu'à la première, et nommant ρ la distance des deux planètes, on aura $R=\frac{m'}{\rho}$, et par le n° 1,

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(v'-v) \\ - 2rr'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(v'+v);$$

r et r' étant les rayons vecteurs de m et de m' dans leurs orbites elliptiques, v et v' les longitudes vraies comptées de la commune intersection de ces orbites.

Nous avons nommé précédemment φ et φ' les anomalies moyennes de m et de m', et nous avons choisi ces deux variables pour les abscisses du solide parabolique dont $F(\varphi, \varphi')$ représentait l'ordonnée. Si l'on suppose donc qu'on remplace dans l'expression précédente r, r', v, v', par leurs valeurs en fonction des anomalies moyennes des deux planètes, on aura $F(\varphi, \varphi')=\frac{m'}{\rho(\varphi, \varphi')}$, et il faudra commencer par calculer les diverses valeurs de $\rho(\varphi, \varphi')$ qui correspondent aux valeurs successives qu'on peut donner à φ et à φ'.

Pour cela, on calculera d'abord les valeurs du rayon vecteur r et de la longitude v de la planète m correspondantes aux valeurs successives de l'anomalie

moyenne $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, $\varphi = 2\frac{2\pi}{m}$, etc.; on calculera de même les valeurs de r' et de v' correspondantes aux valeurs de l'anomalie moyenne $\varphi' = 0$, $\varphi' = \frac{2\pi}{n}$, $\varphi' = 2\frac{2\pi}{n}$, etc., et l'on formera un tableau de ces valeurs. On combinera ensuite entre eux les résultats de ce tableau, de manière à former les valeurs de chacune des quantités représentées généralement par $\rho\left(\lambda\frac{2\pi}{m}, \lambda'\frac{2\pi}{n}\right)$, λ et λ' pouvant prendre toutes les valeurs positives, comprises pour la première, entre 0 et m, et pour la seconde, entre 0 et n. Ces combinaisons seront au nombre de $m \times n$, ainsi que les quantités à former. Ces valeurs calculées, on en déduira généralement $R_{\lambda,\lambda'} = \frac{m'}{\rho\left(\lambda\frac{2\pi}{m}, \lambda'\frac{2\pi}{n}\right)}$, et les formules (B) et (C) donneront ensuite les valeurs des intégrales cherchées.

Tout ce qui précède s'appliquerait de même évidemment au calcul de l'intégrale $\int y\, d\varphi\, d\varphi'$, résultant de la deuxième partie de la fonction R : on observera seulement que cette partie ne produisant aucun terme constant dans le développement de R, la valeur de F n'en sera pas altérée.

26. Lorsqu'on aura effectué, par ce qui précède, le développement de la fonction perturbatrice en série de sinus et de cosinus des multiples de φ et de φ', rien ne sera plus facile que d'en déduire le développement de R en fonction des longitudes moyennes $nt + \varepsilon$ et $n't + \varepsilon'$, de m et de m', c'est-à-dire sous la forme où

cette quantité est ordinairement employée dans le calcul des perturbations planétaires. En effet, φ et φ' étant les anomalies moyennes des planètes m et m', on aura

$$\varphi = nt + \varepsilon - \varpi \quad \text{et} \quad \varphi' = n't + \varepsilon' - \varpi'.$$

En substituant ces valeurs dans R, et en faisant

$$\begin{aligned} R = {} & m'P \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) \\ & + m'P' \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon), \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} m'P &= K_{i,i'} \sin(i'\varpi' - i\varpi) - K'_{i,i'} \cos(i'\varpi' - i\varpi), \\ m'P' &= K_{i,i'} \cos(i'\varpi' - i\varpi) + K'_{i,i'} \sin(i'\varpi' - i\varpi). \end{aligned}$$

On pourrait encore, à la place de φ et de φ', employer toute autre variable que l'on voudra pour le calcul des coefficiens du développement de R, il suffira de substituer à la place de φ et de φ', dans les expressions de $K_{i,i'}$ et $K'_{i,i'}$, leurs valeurs en fonction de ces nouvelles variables. Par exemple, si l'on veut faire usage des anomalies excentriques u et u', d'après les formules du mouvement elliptique, on aura

$$\varphi = u - e \sin u, \quad \varphi' = u' - e' \sin u';$$

d'où l'on tire

$$d\varphi = du(1 - e \cos u), \quad d\varphi' = du'(1 - e' \cos u').$$

Les angles u et u' ayant d'ailleurs les mêmes limites que les angles φ et φ', on aura donc

$$K_{i,i'}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\cos[i(u-e\sin u)-i'(u'-e'\sin u')](1-e\cos u)(1-e'\cos u')du\,du',$$

$$K'_{i,i'}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\sin[i(u-e\sin u)-i'(u'-e'\sin u')](1-e\cos u)(1-e'\cos u')du\,du';$$

et pour le cas où l'on a $i=0$, $i'=0$,

$$F=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R(1-e\cos u)\ (1-e'\cos u')\,du\,du'.$$

On réduira les coefficiens de R, sous le signe intégral, en séries ordonnées suivant les puissances de e et de e', et l'on effectuera ensuite les intégrations relatives à u et à u'.

Pour cela, il faut supposer R exprimé en fonction des anomalies excentriques u et u', en développant ensuite R en série de sinus et de cosinus des multiples de ces deux angles. Soit

$$R=\Sigma A_{i,i'}\cos(iu-i'u')+\Sigma B_{i,i'}\sin(iu-i'u'),$$

i et i' étant des nombres entiers positifs, négatifs ou zéro; on aura généralement

$$A_{i,i'}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\cos(iu-i'u')\,du\,du',$$

$$B_{i,i'}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\sin(iu-i'u')\,du\,du',$$

et en particulier,

$$A_{0,0}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}R\,du\,du'.$$

Il est aisé de voir que tous les termes des valeurs de $K_{i,i'}$ et $K'_{i,i'}$ pourront s'exprimer au moyen des quantités $A_{i,i'}$ et $B_{i,i'}$, supposées calculées pour toutes les va-

leurs de i et de i', et sans qu'il soit besoin de nouvelles intégrations. Quant à ces dernières quantités, on les calculera par la méthode exposée plus haut pour les intégrales doubles, après qu'on aura exprimé les variables qui entrent dans l'expression de R en fonction des anomalies excentriques u et u'. Mais, comme il est aisé de le voir, cette méthode entraînerait dans de plus longs calculs que la précédente, et encore ne donnerait-elle que les valeurs des coefficiens $K_{i,i'}$ et $K'_{i,i'}$ exprimés en séries ordonnées par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle des orbites de m et de m', comme on les obtient par les méthodes ordinaires.

Cependant l'expression de la fonction R en série de sinus et de cosinus des multiples de u et de u', jouit d'une propriété particulière très remarquable, c'est qu'on peut en déduire immédiatement les valeurs des intégrales $\int d'\mathrm{R}$, $\int dt \int d'\mathrm{R}$, et des autres différences partielles de la fonction $\int \mathrm{R}dt$ qui entrent dans les expressions des variations des élémens de l'orbite de m, développées en séries semblables, sans être obligé de substituer les valeurs de u et u' en fonction du temps t avant les intégrations. En effet, soit

$$\int d'\mathrm{R} = \Sigma \mathrm{A}'_{i,i'} \cos(iu - i'u') + \Sigma \mathrm{B}'_{i,i'} \sin(iu - i'u'),$$

et supposons, comme précédemment,

$$\mathrm{R} = \Sigma \mathrm{A}_{i,i'} \cos(iu - i'u') + \Sigma \mathrm{B}_{i,i'} \sin(iu - i'u'). \quad (a)$$

Si l'on différentie par rapport à u cette dernière équation, qu'on différentie, par rapport aux varia-

bles u et u', la première, et qu'ensuite on compare séparément, dans les équations résultantes, les termes affectés de sinus et de cosinus des multiples de u et u', en observant qu'on a

$$du = \frac{ndt}{1 - e\cos u}, \quad du' = \frac{n'dt}{1 - e'\cos u'},$$

on trouvera les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma A_{i,i'}\sin(iu - i'u')\frac{in}{1 - e\cos u} = \Sigma A'_{i,i'}\sin(iu - i'u')\left(\frac{in}{1 - e\cos u} - \frac{i'n'}{1 - e'\cos u'}\right),\\
&\Sigma B_{i,i'}\cos(iu - i'u')\frac{in}{1 - e\cos u} = \Sigma B'_{i,i'}\cos(iu - i'u')\left(\frac{in}{1 - e\cos u} - \frac{i'n'}{1 - e'\cos u'}\right).
\end{aligned}\right\}(d)$$

Considérons d'abord la première. Si l'on multiplie les deux membres par $(1 - e\cos u)(1 - e'\cos u')$, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&n\Sigma iA_{i,i'}\sin(iu - i'u') - ne'\Sigma iA_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u'\\
&= \Sigma(in - i'n')A'_{i,i'}\sin(iu - i'u') - ne'\Sigma iA'_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u'\\
&+ n'e\Sigma i'A'_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u.
\end{aligned}\right\}(e)$$

Mais on a identiquement

$$\Sigma A'_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u = \tfrac{1}{2}\Sigma A'_{i,i'}\sin[(i+1)u - i'u']$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma A'_{i,i'}\sin[(i-1)u - i'u'] = \tfrac{1}{2}\Sigma(A'_{i-1,i'} + A'_{i+1,i'})\sin(iu - i'u'),$$

et de même

$$\Sigma A_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u' = \tfrac{1}{2}\Sigma(A_{i,i'-1} + A_{i,i'+1})\sin(iu - i'u'),$$
$$\Sigma A'_{i,i'}\sin(iu - i'u')\cos u' = \tfrac{1}{2}\Sigma(A'_{i,i'-1} + A'_{i,i'+1})\sin(iu - i'u').$$

L'équation (e), en y substituant ces valeurs, et en comparant les termes semblables dans les deux membres, donnera ainsi :

$$(in - i'n')A'_{i,i'} - \tfrac{1}{2}ine'(A'_{i,i'-1} + A'_{i,i'+1}) + \tfrac{1}{2}i'n'e(A'_{i-1,i'} + A'_{i+1,i'})$$
$$= inA_{i,i'} - \tfrac{1}{2}ine'(A_{i,i'-1} + A_{i,i'+1}), \qquad (g)$$

et en opérant de la même manière sur la seconde des équations (d), on aurait entre les quantités $B'_{i,i'}$, $B'_{i,i'-1}$, etc., $B_{i,i'}$, $B_{i,i'-1}$, etc., une équation semblable.

Il sera facile, au moyen de ces équations, de déterminer la valeur des coefficiens $A'_{i,i'}$, $B'_{i,i'}$, lorsque celle des coefficiens $A_{i,i'}$, $B_{i,i'}$, du développement de R en série sera connue, quel que soit le procédé qu'on ait suivi pour l'obtenir. En effet, supposons qu'en ordonnant par rapport aux puissances et aux produits des excentricités le second membre de l'équation (g), on ait

$$A_{i,i'} - \tfrac{1}{2}e'(A_{i,i'-1} + A_{i,i'+1}) = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + \text{etc.}, \quad (h)$$

$P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, etc., étant des quantités connues, dont la première est indépendante des excentricités, la seconde est un binome dont les deux termes ont pour facteur e ou e', la troisième un trinome dont chaque terme a pour facteur l'une des trois quantités e^2, ee', e'^2, et ainsi de suite.

Soit de même

$$A'_{i,i'} = Q^{(0)}_{i,i'} + Q^{(1)}_{i,i'} + Q^{(2)}_{i,i'} + Q^{(3)}_{i,i'} + \text{etc.},$$

où $Q^{(0)}_{i,i'}$, $Q^{(1)}_{i,i'}$, etc., sont des inconnues qu'on supposera ordonnées par rapport à e et à e', de la même manière que les quantités connues $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, etc. En substituant ces valeurs dans l'équation (h), et en égalant les termes semblables dans les deux membres, on aura

$$(in - i'n')Q^{(0)}_{i,i'} = inP^{(0)},$$

$$(in - i'n')Q^{(1)}_{i,i'} = inP^{(1)} + \frac{1}{2}ine'\left(Q^{(0)}_{i,i'-1} + Q^{(0)}_{i,i'+1}\right) - \frac{1}{2}i'n'e\left(Q^{(0)}_{i-1,i'} + Q^{(0)}_{i+1,i'}\right),$$

$$(in - i'n')Q^{(2)}_{i,i'} = inP^{(2)} + \frac{1}{2}ine'\left(Q^{(1)}_{i,i'-1} + Q^{(1)}_{i,i'+1}\right) - \frac{1}{2}i'n'e\left(Q^{(1)}_{i-1,i'} + Q^{(1)}_{i+1,i'}\right),$$

etc.

La première de ces équations donnera immédiatement le premier terme du développement de $A'_{i,i'}$, et l'on en déduira successivement autant de termes de cette série qu'on voudra, au moyen des équations suivantes. On obtiendra de la même manière la valeur en série du coefficient $B'_{i,i'}$. La valeur de l'intégrale $\int d'R$ étant ainsi complètement déterminée, on en déduira celle de l'intégrale $\int dt \int d'R$, en substituant, dans l'équation (c), $\int d'R$ à la place de R. On pourrait étendre aisément tout ce que nous venons de dire aux intégrales plus générales $\int R dt$, $\int\int R dt^2$, et l'on en déduirait, par la différentiation, les différences partielles de $\int R dt$, par rapport aux élémens de l'orbite de m, qui entrent dans les formules qui déterminent leurs variations. On aurait donc ainsi les variations finies de ces élémens, sans être obligé, pour effectuer les intégrations, de réduire la fonction perturbatrice à ne renfermer explicitement qu'une seule variable; mais cet avantage paraîtra bien faible, si l'on observe que les élémens de l'or-

bite troublée se trouveront alors exprimés en séries des sinus et cosinus des angles u et u', et qu'il faudra de nouvelles opérations pour les ramener à la forme de séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples des longitudes moyennes $nt+\epsilon$, $n't+\epsilon'$. Cette manière de développer les fonctions R, $\int Rdt$, etc., ne nous paraît donc qu'un point curieux d'analyse; elle entraînerait le calculateur dans des opérations beaucoup plus longues que les méthodes ordinaires, et nous ne l'avons exposée ici que parce que plusieurs ouvrages en ont déjà fait mention, et qu'il nous semblait utile d'en signaler les inconvéniens.

Au reste, ce que nous avons dit précédemment suffira, dans tous les cas, pour obtenir d'une manière très approchée les valeurs des coefficiens de la série qui résulte du développement de la fonction perturbatrice, toutes les fois que i et i' ne seront pas de trop grands nombres; car on voit, d'après les valeurs de P'_0, P'_1, P'_2, etc. (n° 25), qu'on sera obligé de resserrer de plus en plus les ordonnées du cube parabolique à mesure qu'on considérera des inégalités dépendantes de multiples plus élevés des anomalies moyennes des deux planètes, pour que les termes dont ces quantités se composent ne changent pas trop souvent de signe, ce qui nuirait à leur exactitude. Il pourra donc arriver que les calculs deviennent impossibles par leur multiplicité, et l'on sera obligé alors de renoncer aux avantages qu'offre, sous d'autres rapports, l'emploi de cette méthode. Mais nous reviendrons sur cet objet lorsque nous nous oc-

cuperons de réduire en nombres les formules analytiques des inégalités planétaires, cette digression nous ayant déjà écarté trop long-temps du sujet principal que nous traitons en ce moment.

CHAPITRE III.

Inégalités planétaires dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons.

27. Nous avons divisé, dans le livre II, les inégalités des planètes qui résultent de leur action réciproque, en deux espèces distinctes, les unes *séculaires*, les autres *périodiques*. Dans le chapitre VIII du même livre, nous avons exposé la théorie complète des premières, et dans le chapitre IX, nous avons développé les inégalités périodiques indépendantes des excentricités et des inclinaisons, et celles qui dépendent de leurs premières puissances. Nous nous proposons ici de porter plus loin ces approximations, et de présenter des formules générales au moyen desquelles on pourra déterminer les inégalités périodiques dépendantes d'une puissance quelconque des excentricités et des inclinaisons, et même celles qui dépendent du carré des forces perturbatrices.

Dans toute inégalité planétaire il y a deux élémens à considérer, le coefficient et l'argument ; le premier détermine la grandeur de l'inégalité, le second sa période. Tous les termes du développement de la

fonction perturbatrice, qui dépendent du carré et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, étant en général insensibles, ils ne peuvent produire d'inégalité considérable dans le mouvement d'une planète, que par les petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir n° 59, livre II. La grandeur de chaque inégalité dépend donc non-seulement de l'ordre de termes auxquels elle appartient, mais encore des modifications que les termes de la fonction perturbatrice auxquels elle correspond, subissent dans les équations différentielles du mouvement troublé.

Si le coefficient qui multiplie le temps sous le signe sinus ou cosinus a une valeur considérable, l'argument prendra des accroissemens rapides, la période de l'inégalité sera courte, et sa grandeur dépendra uniquement de l'ordre auquel elle appartient, relativement aux excentricités et aux inclinaisons des orbites. Dans la théorie des planètes principales, on ne porte ordinairement l'approximation, relativement à ces inégalités, que jusqu'aux termes qui sont du premier ordre par rapport aux excentricités, et qui dépendent de la première puissance des masses perturbatrices. Cette approximation suffit; et d'ailleurs comme de pareilles inégalités se manifestent promptement aux regards de l'observateur, il n'est pas à craindre que la théorie puisse en omettre aucune susceptible de devenir considérable.

Si au contraire le coefficient du temps sous le signe sinus ou cosinus est une très petite quantité,

l'argument croît alors avec une grande lenteur, la période de l'inégalité est très longue, et pendant long-temps on peut regarder ses accroissemens comme proportionnels au temps. Ce n'est donc que par la comparaison d'observations très éloignées que de pareilles inégalités peuvent devenir sensibles; et elles ont, comme on voit, tous les caractères de véritables inégalités séculaires. On les a nommées *inégalités à longue période*, et leur théorie est d'autant plus importante dans l'exposition analytique du système du monde, qu'après avoir été regardées long-temps comme une anomalie dans la loi de la pesanteur universelle, elles en sont devenues une des preuves les plus convaincantes depuis qu'on en a reconnu les véritables causes.

C'est à Laplace qu'on doit cette découverte. Les observations anciennes et modernes indiquaient dans le mouvement de Jupiter et dans celui de Saturne deux grandes inégalités qu'on avait en vain cherché à expliquer par la théorie, parce qu'on ne supposait pas qu'il pût exister dans le mouvement des planètes aucune inégalité sensible parmi les termes dépendans des puissances des excentricités supérieures à la première. Ces inégalités sont affectées de signes contraires, en sorte que si, par leur effet, le moyen mouvement de Jupiter paraît s'accélérer, le moyen mouvement de Saturne, au contraire, paraît être retardé, et *vice versâ*. Enfin, Laplace remarqua encore que l'accélération du moyen mouvement de la première de ces planètes, déterminé par Halley, était au ralentissement du moyen mouvement de la seconde,

à très peu près comme la masse de Saturne, multipliée par la racine carrée de son demi-grand axe, est à la masse de Jupiter multipliée de même par la racine carrée de la moitié du grand axe de son orbite. Ces diverses relations sont celles qu'indique la théorie entre les inégalités à longue période de deux planètes réagissant l'une sur l'autre. Comme d'ailleurs les moyens mouvemens ne peuvent être soumis à aucune inégalité indépendante de leur configuration mutuelle, Laplace ne douta plus que les inégalités dont il s'agit ne résultassent de l'action réciproque de Jupiter et de Saturne, et que ces inégalités, rangées parmi celles que l'on avait regardées jusque-là comme inappréciables, ne devinssent sensibles par l'effet de quelque circonstance particulière. En effet, les moyens mouvemens de ces deux planètes approchant beaucoup d'être commensurables, en sorte que cinq fois le moyen mouvement de Jupiter, moins deux fois celui de Saturne, est une très petite quantité, l'inégalité à longue période qui dépend de cet argument peut devenir considérable en acquérant cette petite quantité pour diviseur, quoiqu'elle soit au moins du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Le calcul confirma pleinement cette conjecture; et c'est ainsi que cette découverte, l'une des plus belles de l'Astronomie physique, résulta d'une suite de considérations fondées sur la théorie, sans que le hasard, quelquefois si favorable même aux géomètres, y ait eu aucune part.

Il en est de même de toutes les inégalités de l'espèce de celles que nous avons nommées *inégalités à lon-*

gues périodes; elles seront d'autant plus sensibles, que les moyens mouvemens des deux planètes qui réagissent l'une sur l'autre, approcheront davantage d'être commensurables; et l'on voit que plus elles croîtront avec lenteur, plus, toutes choses égales d'ailleurs, elles pourront devenir considérables. Parmi ces inégalités, les plus importantes sont celles de Jupiter et de Saturne, à cause de la grandeur de leurs coefficiens; et, par cette raison, on a été forcé de porter dans leur calcul l'approximation jusqu'aux cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, et jusqu'aux termes dépendans du carré des masses. On verra que les résultats qu'on a ainsi obtenus représentent les observations avec une grande précision. Une inégalité à longue période existe encore dans le mouvement de la planète Uranus; une autre, mais beaucoup moins sensible, dans le mouvement de Mercure; enfin, on a découvert, dans ces derniers temps, dans le mouvement de la Terre une inégalité de même espèce, dont le coefficient est peu considérable, il est vrai, puisqu'il ne s'élève guère qu'à deux secondes, mais que cependant les observations modernes rendent sensible, et qui doit être comprise désormais parmi celles qui servent à la construction des tables du Soleil.

La théorie des inégalités *à longue période* va particulièrement nous occuper dans ce chapitre. Nous déterminerons celles du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, qui dépendent d'une puissance quelconque des excentricités, en employant la méthode fondée sur l'intégration directe des équa-

tions différentielles du mouvement troublé, et ensuite le procédé de la variation des constantes arbitraires. Ainsi que nous l'avons fait dans le livre II, nous montrerons l'accord parfait de ces deux méthodes, et nous indiquerons les avantages particuliers à chacune d'elles.

Dans l'un des chapitres suivans, nous réduirons ces formules en nombres, en y substituant les valeurs relatives à chaque planète. Ce grand travail avait déjà été en partie exécuté par divers géomètres avant même l'apparition de la *Mécanique céleste;* cependant il n'avait point encore atteint toute la perfection désirable : de nouvelles inégalités ont été découvertes depuis cette époque, et quelques erreurs inévitables dans les longues opérations numériques ont été signalées dans plusieurs résultats de cet ouvrage. J'ai donc pensé qu'il serait utile de reprendre ici ce travail en entier, et de profiter des recherches de tous les géomètres qui se sont occupés des inégalités planétaires, pour présenter dans un même ensemble le tableau des résultats les plus complets et les plus exacts qu'on ait obtenus jusqu'à présent dans cette partie de la théorie du système du monde, si importante pour la précision des tables astronomiques, dont elle est la base.

28. Reprenons la formule (5) du n° 89 du livre II :

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu.r\delta r}{r^3} - 2\int d'\mathrm{R} - r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) = 0. \quad (1)$$

Si l'on suppose, comme dans le n° 48, $r = a(1+u)$, et qu'on observe que par les formules du mouvement

elliptique on a $\frac{\mu}{a^3} = n^2$, on aura

$$\frac{\mu r \delta r}{r^3} = an^2 \delta r (1+u)(1+u)^{-3} = an^2 \delta r (1+u)(1 - 3u + 6u^2 - 10u^3 + 15u^4 - 21u^5 + \text{etc.}),$$

ou bien

$$\frac{\mu r \delta r}{r^3} = n^2 r \delta r - an^2 \delta r (3u - 3u^2 + 4u^3 - 5u^4 + 6u^5 - 7u^6 + 8u^7 - 9u^8 + \text{etc}).$$

En faisant donc, pour abréger,

$$F = 3u - 3u^2 + 4u^3 - 5u^4 + 6u^5 - 7u^6 + 8u^7 - 9u^8 + \text{etc.},$$

l'équation (1) deviendra

$$\frac{d^2 r \delta r}{dt^2} + n^2 r \delta r - an^2 . F \delta r - 2 \int d'R - r \frac{dR}{dr} = 0. \quad (2)$$

D'après l'expression du rayon vecteur, u, et par conséquent F, sont des quantités de l'ordre des excentricités, il suffira donc, dans l'équation précédente, de substituer pour δr, dans les termes multipliés par F, la valeur de cette quantité résultante des approximations qui précèdent celle que l'on considère. Si donc on substitue pour u sa valeur dans F, et pour δr les valeurs résultantes des premières approximations, et qu'on fasse, pour abréger,

$$P = an^2 . F \delta r + 2 \int d'R + r \frac{dR}{dr},$$

on pourra regarder P comme développé en une suite de sinus et des cosinus des multiples des moyens mouvemens de la planète troublée et de la planète perturbatrice. Soit donc $Q \frac{\sin}{\cos} (\beta t + \rho)$ l'un quelconque des termes de cette suite ; en n'ayant égard qu'à

ce terme, on aura

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+n^2.r\delta r-\mathrm{Q}\,{}^{\sin}_{\cos}(\beta t+\rho)=0\,;$$

et l'on satisfera à cette équation en faisant

$$r\delta r=\frac{\mathrm{Q}}{n^2-\beta^2}\,{}^{\sin}_{\cos}(\beta t+\rho).$$

On déterminerait de la même manière chacun des termes de la valeur de $r\delta r$ correspondant au terme que l'on aura considéré dans la fonction P ; et d'après la théorie des équations linéaires, la réunion de tous ces termes formera la valeur complète de la quantité $r\delta r$.

Cela posé, considérons dans R un terme de la forme :

$$m'k\cos\left[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+\mathfrak{C}\right].$$

En observant que $r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=a\frac{d\mathrm{R}}{da}$, n° 4, on aura relativement à ce terme :

$$2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=m'\left[\frac{2(l-i)n}{i(n'-n)+ln}.k+a\frac{dk}{da}\right]\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+\mathfrak{C}]\,;$$

et si l'on observe qu'en faisant $\mu=1$, ce qui revient à prendre pour unité de masse la somme des masses du Soleil et de la planète m, on a $a^3n^2=1$, il est aisé de voir qu'il en résultera, dans la valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$, le terme suivant :

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{m'n^2\left[\frac{2(i-l)n}{i(n'-n)+ln}ak-a^2\frac{dk}{da}\right]}{[i(n'-n)+ln]^2-n^2}\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+\mathfrak{C})],\quad(3)$$

où i peut prendre toutes les valeurs positives ou négatives depuis zéro jusqu'à l'infini.

Le diviseur de cette expression étant la différence de deux carrés, peut s'écrire ainsi

$$[i(n'-n)+(l+1)n]\,[i(n'-n)+(l-1)n]\ ;$$

et si l'un des deux facteurs de ce produit est une très petite quantité, l'inégalité précédente pourra devenir considérable.

Dans l'impossibilité où l'on est de calculer rigoureusement toutes les inégalités qui dépendent du carré et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, à cause de leur multiplicité, on doit s'attacher spécialement à celles qui peuvent acquérir quelque influence par l'intégration, et l'expression (3) donne un moyen très simple de les reconnaître *à priori*.

En effet, tous les termes du développement de R sont généralement insensibles, lorsqu'on passe la première puissance des excentricités et des inclinaisons, à cause de la convergence de la série ; et si ces termes produisent ensuite, dans l'expression du rayon vecteur, quelque inégalité importante, cela provient nécessairement de ce que l'intégration leur fait acquérir de très petits diviseurs qui les rendent considérables. Cette circonstance se présente toutes les fois qu'il existe quelque rapport de commensurabilité entre les moyens mouvemens de la planète troublée et de la planète perturbatrice. Les inégalités qui en résultent dans les mouvemens de ces deux planètes croissent avec une grande lenteur, puisque le coeffi-

cient du temps, sous les signes sinus ou cosinus dont elles sont affectées, est supposé une très petite quantité; elles mettent, en général, plusieurs siècles à passer de leur *maximum* au *minimum* de leurs valeurs, et, par cette raison, on les a nommées, comme nous l'avons dit, *inégalités à longue période*.

On voit, par ce qui précède, comment les inégalités de cette espèce peuvent devenir considérables, quand même elles dépendraient des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons.

Ainsi donc, pour étudier complètement la théorie d'une planète, on commencera par former les trois quantités $i(n'-n)+(l-1)n$, $i(n'-n)+ln$, $i(n'-n)+(l+1)n$, dans lesquelles l sera l'exposant de la puissance des excentricités et des inclinaisons auxquelles on s'est arrêté (n° 4), et i pourra prendre toutes les valeurs positives et négatives possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini. Si parmi ces valeurs il en est qui rendent l'une des trois quantités précédentes très petite, on considérera dans R le terme qui leur correspond, et l'on déterminera par la formule (3) l'inégalité qui en résulte dans l'expression du rayon vecteur; on réunira ensuite cette inégalité aux autres termes du rayon vecteur qui dépendent du même argument, et qu'on déterminera de la manière suivante :

Nous avons supposé

$$F = -3u + 3u^2 - 4u^3 + 5u^4 - 6u^5 + 7u^6 - 8u^7 + 9u^8 - \text{etc.}$$

On a (n° 3)

$$u=\frac{1}{2}e^2-\left(e-\frac{3}{8}e^3+\frac{5}{192}e^5+\text{etc.}\right)\cos(nt+\varepsilon-\varpi)-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{3}e^4+\text{etc.}\right)\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$-\left(\frac{3}{8}e^3-\frac{45}{128}e^5+\text{etc.}\right)\cos 3(nt+\varepsilon-\varpi)-\frac{1}{3}e^4\cos 4(nt+\varepsilon-\varpi)-\frac{125}{384}\cos 5(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$+\text{etc.};$$

d'où l'on conclura

$$F=3\left(e+\frac{1}{8}e^3-\frac{49}{64}e^5\right)\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+3e^2\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$-\left(\frac{29}{8}e^3+\frac{3}{4}e^5\right)\cos 3(nt+\varepsilon-\varpi)+\frac{37}{8}e^4\cos 4(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$+\frac{773}{128}e^5\cos 5(nt+\varepsilon-\varpi)+\text{etc.}).$$

Soit maintenant

$$G\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+gnt+g\varepsilon+\gamma)]$$

l'un des termes de la valeur de $\frac{\delta r}{a}$ dépendant des puissances des excentricités et des inclinaisons d'un ordre inférieur à celui que l'on considère, et déjà déterminé par les approximations précédentes. En combinant cette valeur avec la précédente, il en résultera dans la fonction $an^2.F\delta r$ des termes de cette forme

$$\tfrac{1}{2}a^2n^2H\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+(g\pm f)(nt+\varepsilon)+\delta],$$

où i est susceptible de toutes les valeurs positives et négatives, en y comprenant zéro; et où l'on doit supposer successivement $f=1$, $f=2$, $f=3$, etc.

Si parmi ces termes on choisit ceux dans lesquels on a $g\pm f=l$, et où le coefficient H est du même ordre, par rapport aux excentricités et aux incli-

naisons, que les inégalités que l'on veut calculer; qu'on les substitue dans l'équation différentielle (2), et qu'après l'intégration on les réunisse aux termes qui résultent directement de la fonction R, et que nous avons déterminés plus haut, on aura toutes les inégalités de $\frac{r\delta r}{a^2}$ qui dépendent de l'argument $i(n't - nt) + lnt$, et qui peuvent, par conséquent, devenir sensibles dans l'expression du rayon vecteur. On trouve ainsi

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} n^2 \Sigma \mathrm{H} \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon + \delta] \\ + m'n^2 \cdot \left[\frac{2(i-l)n}{i(n'-n)+ln} \cdot ak - a^2 \frac{dk}{da} \right] \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon + \zeta] \end{array} \right\}}{[i(n'-n) + ln]^2 - n^2}, \quad (4)$$

la caractéristique Σ devant comprendre tous les termes de la fonction $\mathrm{F}\delta r$ qui dépendent de l'argument $in't + (l - i)nt$, et qui sont de l'ordre l par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

En donnant à i, dans cette formule, toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro, on aura toutes les inégalités du rayon vecteur de l'ordre l dans lesquelles le coefficient de nt surpasse ou est surpassé par celui de $n't$ de l unités.

29. Déterminons les termes correspondans de la valeur de δv; on a, par la formule (6) du n° 89 du livre II,

$$\delta v = \frac{\frac{2rd.\delta r + dr\delta r}{a^2ndt} - an\left[3\int\int dt.d'\mathrm{R} + 2\int r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)dt\right]}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (5)$$

En négligeant, pour plus de simplicité, le dénomi-

nateur $\sqrt{1 - e^2}$, et en ne considérant d'abord que la partie de δv qui dépend de la fonction R, on aura

$$\delta v = -3a\int ndt \int d'\mathrm{R} - 2a\int r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right).ndt; \quad (6)$$

par conséquent, en vertu du terme

$$m'k \cos\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon + \varpi\right],$$

que cette fonction renferme, on aura

$$\delta v = \left\{\frac{3(i-l)m'n^2}{[i(n'-n)+ln]^2}.ak - \frac{2m'n}{[i(n'-n)+ln]}.a^2\frac{dk}{da}\right\}.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+\varpi],$$

i et l étant susceptibles de toutes les valeurs positives ou négatives, y compris zéro.

Si la quantité $i(n' - n) + ln$ est très petite, il en résultera dans δv une inégalité d'autant plus sensible, que le carré même de cette quantité entre comme diviseur dans l'expression précédente. C'est donc spécialement au calcul des inégalités qui sont assujetties à cette condition qu'il faut s'attacher ; et elles sont d'autant plus importantes à considérer, que le moyen mouvement de la planète m est affecté lui-même des mêmes inégalités. En effet, en faisant $\zeta = \int ndt$, on a (n° 43, livre II)

$$\delta\zeta = -3\int\int andt.d'\mathrm{R}.$$

En n'ayant donc égard, dans le développement de la fonction R, qu'au terme que nous considérons, on aura

$$d\zeta = \frac{3(i-l)m'n^2}{[i(n'-n)+ln]^2}.ak \sin\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon + \varpi\right].$$

La partie de δv qui a pour diviseur le carré de $i(n'-n)+ln$ est donc celle qui résulte de la variation du moyen mouvement dans l'expression de la longitude moyenne $nt+\varepsilon$. Le second terme de cette expression dépend de la variation de l'époque; mais comme le premier est généralement beaucoup plus considérable que les autres, on pourra, sans erreur sensible, appliquer au moyen mouvement la variation entière de δv calculée par la formule précédente.

Considérons maintenant la partie $\frac{2rd.\delta r + dr\delta r}{a^2 ndt}$ ou $\frac{2d.r\delta r - dr\delta r}{a^2 ndt}$ de l'expression de δv. La quantité $\frac{2d.r\delta r}{a^2 ndt}$ s'obtiendra immédiatement en multipliant le coefficient de l'expression précédente de $\frac{r\delta r}{a^2}$ par..... $-\frac{2[i(n'-n)+fn]}{n}$, et en changeant ensuite les cosinus en sinus. Pour plus de simplicité, nous la laisserons sous cette forme.

Quant à la quantité $\frac{dr\delta r}{a^2 ndt}$, c'est d'elle que résultent dans δv les termes indépendans de R, qu'on calculera de la manière suivante : l'équation $r=a(1+u)$ donne, en différentiant $\frac{dr}{andt}=\frac{du}{ndt}$. En vertu de la valeur de u rapportée plus haut, on aura donc

$$\frac{dr}{andt} = \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5\right)\sin(nt+\epsilon-\omega)$$
$$+\left(e^2 - \frac{2}{3}e^4\right)\sin 2(nt+\epsilon-\omega)$$
$$+\left(\frac{9}{8}e^3 - \frac{135}{128}e^5\right)\sin 3(nt+\epsilon-\omega)$$
$$+\frac{4}{3}e^4\sin 4(nt+\epsilon-\omega)$$
$$+\frac{625}{384}e^5\sin 5(nt+\epsilon-\omega)$$
$$+ \text{etc.}$$

Représentons par $h\cos f(nt+\epsilon-\omega)$ un terme quelconque de cette suite, et considérons comme précédemment dans $\frac{\delta r}{a}$ le terme

$$G\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+gnt+g\epsilon+\eta].$$

Si l'on combine ce terme avec ceux dont se compose l'expression précédente de $\frac{dr}{andt}$, il en résultera dans le produit $\frac{dr}{andt}\cdot\frac{\delta r}{a}$ une suite de termes de cette forme :

$$\pm\frac{1}{2}K\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+(g\pm f)(nt+\epsilon)+\beta],$$

g et i étant susceptibles de toutes les valeurs positives et négatives, y compris zéro, et le signe supérieur ayant lieu quand f est pris positivement et le signe inférieur dans le cas contraire. On voit de plus, par l'expression de $\frac{dr}{andt}$, que f est l'exposant de la

puissance la moins élevée de l'excentricité e dans la série que h représente.

Si dans la suite de termes ainsi déterminés on choisit ceux où l'on a $g \pm f = l$, et si on les réunit aux termes qui résultent directement du développement de R, et dont l'expression a été donnée plus haut, on aura alors tous les termes de δv qui dépendent de l'argument $i(n'-n)t+lnt$, et que l'intégration peut rendre sensibles. On trouvera ainsi,

$$\left.\begin{aligned} \delta v = \frac{2d.r\delta r}{a^2 ndt} \mp \frac{1}{2}\Sigma \mathrm{K} \sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon+\beta] \\ + \left\{\frac{3(i-l)m'n^2}{[i(n'-n)+ln]^2}.ak - \frac{2m'n}{[i(n'-n)+ln]}.a^2\frac{dk}{da}\right\}\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon+\zeta], \end{aligned}\right\} (7)$$

i étant susceptible de toutes les valeurs positives ou négatives, y compris zéro, l étant le nombre d'unités dont le coefficient de $n't$ surpasse ou est surpassé par le coefficient de nt, et le signe Σ devant comprendre tous les termes du produit $\frac{dr\delta r}{a^2 ndt}$ qui dépendent de l'argument $i(n'-n)\,t+lnt$, et qui sont par rapport aux excentricités et aux inclinaisons du même ordre que K.

La période des inégalités du rayon vecteur et de la longitude dont nous venons de donner l'expression générale étant supposée très longue, les élémens elliptiques des orbites de m et de m' changeront pendant cet intervalle, en vertu de leurs variations séculaires; et pour l'exactitude des résultats, il sera nécessaire d'avoir égard à ces altérations dans les formules précédentes. C'est à quoi l'on parviendra très simplement de la manière suivante :

10..

Nous supposerons aux termes du développement de R qui dépendent de l'argument .... $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon$ cette forme :

$$R = m'P \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon]$$
$$+ m'P' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon].$$

En différentiant par rapport à nt, on aura

$$d'R = -m'(i-l)ndtP\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon]$$
$$+ m'(i-l)ndtP'\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon].$$

Si l'on intègre maintenant cette expression par parties en y regardant P et P' comme des fonctions variables des élémens des orbites de m et de m', on aura

$$3a\int ndt \int d'R = \frac{3(l-i)m'an^2}{[i(n'-n)+ln]^2}$$
$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left[P' + \frac{2dP}{[i(n'-n)+ln]dt} - \frac{3d^2P'}{[i(n'-n)+ln]^2dt^2} \right. \\ \left. \quad - \frac{4d^3P}{[i(n'-n)+ln]^3dt^3} + \text{etc.}\right] \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon] \\ - \left[P - \frac{2dP'}{[i(n'-n)+ln]dt} - \frac{3d^2P}{[i(n'-n)+ln]^2dt^2} \right. \\ \left. \quad + \frac{4d^3P'}{[i(n'-n)+ln]^3dt^3} - \text{etc.}\right] \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon]. \end{array} \right\}$$

Les quantités $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, etc., décroissant avec une grande rapidité, vu la lenteur des variations séculaires des élémens elliptiques, on pourra, dans la plupart des cas, n'avoir égard qu'aux deux premiers termes des séries précédentes.

On aura ensuite, en vertu de la valeur précédente de R,

$$2an\int a\left(\frac{dR}{da}\right)dt=\frac{2m'an}{i(n'-n)+ln}\cdot\left\{\begin{array}{l}-a\frac{dP}{da}\cos\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon\right]\\ +a\frac{dP'}{da}\sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon\right].\end{array}\right\}$$

Il est inutile d'avoir égard aux variations des quantités P et P′ dans ce terme, qui est toujours très petit relativement au précédent; la valeur de δv deviendra ainsi

$$\left.\begin{array}{l}\delta v=\frac{2d.r\delta r}{a^2ndt}\mp\frac{1}{2}\Sigma.\mathrm{K}\sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon+\beta\right]\\ +\left\{\frac{3(i-l)m'an^2}{[i(n'-n)+ln]^2}\cdot\left[P'+\frac{2dP}{[i(n'-n)+ln]dt}\right]-\frac{2m'an}{i(n'-n)+ln}.a\frac{dP'}{da}\right\}.\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\\ -\left\{\frac{3(i-l)m'an^2}{[i(n'-n)+ln]^2}\cdot\left[P-\frac{2dP'}{[i(n'-n)+ln]dt}\right]-\frac{2m'an}{i(n'-n)+ln}a.\frac{dP}{da}\right\}.\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\end{array}\right\}(8$$

On obtiendrait relativement au rayon vecteur une expression semblable, en introduisant à la place de R sa valeur précédente dans l'équation différentielle (1), et en l'intégrant ensuite, en ayant égard à la variabilité de P et P′; mais comme les termes qui en résulteraient dans l'expression de $\frac{r\delta r}{a^2}$ sont, à très peu près, insensibles, nous nous dispenserons de cette opération.

Pour déterminer les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{d^2P'}{dt^2}$, etc., il faudrait différentier les quantités P et P′ par rapport aux élémens elliptiques que ces quantités renferment, en substituant ensuite, au lieu des différences de ces élémens, leurs valeurs ordonnées par rapport aux puissances du temps, on aurait les expressions de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{d^2P'}{dt^2}$, etc., dévelop-

pées de la même manière; en s'en tenant aux termes multipliés par le carré du temps, l'expression précédente de δv prendra alors cette forme :

$$(A+Bt+Ct^2)\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon]$$
$$+(A'+B't+C't^2)\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon],$$

et cette expression pourra s'étendre en général à plusieurs siècles, avant et après l'instant que l'on aura choisi pour époque.

Mais dans les applications il sera plus simple de déterminer les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{d^2P'}{dt^2}$, de la manière suivante. L'expression de P au bout du temps t sera généralement

$$P+t\frac{dP}{dt}+\frac{t^2}{1.2}\cdot\frac{d^2P}{dt^2}+\text{etc.}$$

Cette expression, en s'en tenant aux termes dépendans du carré du temps, pourra s'étendre à mille ou douze cents ans avant et après l'instant que l'on a choisi pour époque.

Cela posé on calculera, en ayant égard aux variations que subissent dans cet intervalle les élémens des orbites, les valeurs de P pour deux nouvelles époques distantes, la première de t', la seconde de t'', de celle d'où l'on compte le temps t. En nommant P_1 et P_2 ces valeurs, on aura

$$P_1=P+t'\frac{dP}{dt}+\frac{t'^2}{1.2}\cdot\frac{d^2P}{dt^2},$$
$$P_2=P+t''\frac{dP}{dt}+\frac{t''^2}{1.2}\cdot\frac{d^2P}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dP}{dt} = \frac{t''^2(P_1 - P) - t'^2(P_2 - P)}{t' t''(t'' - t')},$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 2 \cdot \frac{t'(P_2 - P) - t''(P_1 - P)}{t' t''(t'' - t')}.$$

On aurait de la même manière les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ et de $\frac{d^2P'}{dt^2}$.

Dans la plupart de ces cas, c'est-à-dire lorsque les inégalités que l'on veut déterminer ne sont pas très considérables, on peut, comme nous l'avons dit plus haut dans l'expression de δv, négliger $\frac{d^2P}{dt^2}$ et $\frac{d^2P'}{dt^2}$; on aura alors simplement

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P_1 - P}{t'}, \qquad \frac{dP'}{dt} = \frac{P'_1 - P'}{t'},$$

t' désignant ici un intervalle de deux à trois siècles qui sépare les époques pour lesquelles les valeurs de P, P_1, P' et P'_1, ont été calculées.

30. La formule (8), lorsqu'on néglige les termes dépendans des différences $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{dP'}{dt}$, doit coïncider avec la formule (7). C'est, en effet, ce dont il est facile de s'assurer en développant cette dernière, et en observant que par la comparaison des deux expressions que nous avons supposées aux termes de R que nous considérons, on a

$$P' = k \cos 6, \qquad P = -k \sin 6.$$

Réciproquement, il est souvent utile dans la théorie des perturbations planétaires de réunir en un seul terme les diverses parties d'une inégalité dépendante d'un argument déterminé $i'n' - in$. Pour cela, on commencera par décomposer ces différentes parties, de manière à donner à leur somme la forme suivante

$$A\sin(i'n't - int + i'\varepsilon - i\varepsilon) + B\cos(in't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon).$$

Si l'on suppose ensuite que l'inégalité dont il s'agit devienne

$$L\sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon + \theta),$$

on aura pour déterminer L et θ les deux équations

$$L = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \text{tang}\,\theta = \frac{B}{A}.$$

Ces transformations nous seront très utiles dans la suite.

31. Lorsque la valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$ sera déterminée, il sera facile d'en conclure celle de $\frac{\delta r}{a}$. En effet, si l'on désigne par $\frac{\delta' r}{a}$ la partie de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + lnt + l\varepsilon$ et par .... $\Sigma N\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + fnt + f\varepsilon + \chi]$ les autres termes dont cette quantité se compose, on aura

$$\frac{r\delta r}{a^2} = \frac{r}{a}\left\{\frac{\delta' r}{a} + \Sigma N\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + fnt + f\varepsilon + \chi]\right\}.$$

Si l'on substitue pour $\frac{r}{a}$ sa valeur $1 + u$, et que dans

le produit $u\Sigma F\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+fnt+f\varepsilon+\chi]$, on ne conserve que les termes dépendans de l'angle $i[n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon$, que pour abréger on désigne ces termes par

$$\Sigma L\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+O],$$

l'équation précédente, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent du même argument, donnera

$$\frac{\delta r}{a}=\frac{r\delta r}{a^2}-\Sigma L\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon+O].$$

32. Il nous reste à déterminer les inégalités du mouvement de la planète en latitude. On pourrait employer pour cela la formule (7) du n° 89, livre II.

$$\frac{d^2 \,.\, r\delta s}{dt^2}+\frac{\mu \,.\, r\delta s}{r^3}-\frac{dR}{dz}=0. \qquad (9)$$

Comme cette équation suppose que l'on prend pour plan fixe celui de l'orbite primitive, après avoir différentié par rapport à z la fonction R, on fera $z=0$ dans le résultat, et l'on formera le développement de la fonction

$$\frac{dR}{dz}=m'z'\left\{\frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{r'^3}\right\},$$

par les mêmes moyens que nous avons employés pour le développement de la fonction R. On peut d'ailleurs déduire ces deux expressions l'une de l'autre au moyen des formules du n° 4; l'équation (9) ayant même forme que l'équation (1), s'intégrera

ensuite de la même manière, et donnera, par des approximations successives, les inégalités de la latitude de tel ordre qu'on voudra, par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons.

Mais comme les inégalités de la latitude sont en général très peu considérables, il suffira de déterminer celles qui pourraient devenir sensibles par les très petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir. Alors il sera plus simple d'employer à cette détermination les formules relatives à la variation des constantes qui fixent la position du plan de l'orbite. On aura, n° 86, livre II,

$$\delta s = \delta q \sin(v - \Pi) - \delta p \cos(v - \Pi). \quad (10)$$

Et pour déterminer δp et δq, on aura, n° 4, les formules

$$dp = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}} \cos\frac{1}{2}\gamma \frac{dR}{d\lambda};$$

$$dq = \frac{andt}{\sin\gamma\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{dR}{d\Pi} + \frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{dR}{d\epsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right)\right].$$

Si l'on se borne à considérer dans l'expression de la latitude, parmi les termes dépendans d'un argument donné ceux qui sont de l'ordre le moins élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, on pourra négliger les termes multipliés par e^2 et γ^2, dans ces deux expressions, ce qui donne $\lambda = \sin\gamma$; on aura simplement ainsi

$$dp = -\,andt\,\frac{dR}{d\lambda},$$

$$dq = \quad andt\,\frac{dR}{\lambda d\Pi}.$$

Soit donc

$$m'A\lambda^{2g}\cos(i'n't - int + B - 2g\Pi)$$

un terme quelconque de R dépendant de l'angle $i'n't - int$. En n'ayant égard qu'à ce terme, on aura

$$\frac{dR}{d\lambda} = 2gm'A\lambda^{2g-1}\cos(i'n't - int + B - 2g\Pi),$$

$$\frac{dR}{\lambda d\Pi} = 2gm'A\lambda^{2g-1}\sin(i'n't - int + B - 2g\Pi),$$

et par conséquent

$$\delta p = -\frac{2gm'Aan}{i'n' - in}\lambda^{2g-1}\sin(i'n't - int + B - 2g\Pi),$$

$$\delta q = -\frac{2gm'Aan}{i'n' - in}\lambda^{2g-1}\cos(i'n't - int + B - 2g\Pi).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (10), on trouvera

$$\delta s = \frac{2gm'Aan}{i'n' - in}\lambda^{2g-1}\sin[i'n't - int - v + B - (2g-1)\Pi]. \quad (11)$$

On aura donc ainsi les inégalités de la latitude correspondantes aux termes de R qui dépendent de l'angle $i'n't - int$, et que la petitesse du diviseur $i'n' - in$ peut rendre sensibles. L'expression de δs ne renferme, il est vrai, ce diviseur qu'à la première puissance; et sous ce rapport, l'inégalité qui en résulte doit être, par conséquent, beaucoup moins considérable que l'inégalité correspondante de la longitude moyenne; mais, d'un autre côté, l'ordre de son coefficient se trouvant abaissé d'une unité, cette

circonstance doit contribuer à augmenter sa valeur. Au reste, toutes les inégalités de la latitude d'un ordre supérieur au premier sont insensibles dans les mouvemens des planètes, excepté relativement à Jupiter et à Saturne, à cause du rapport de commensurabilité qui existe entre leurs moyens mouvemens.

33. Si l'on veut rapporter le mouvement de m à un plan fixe très peu incliné à celui de son orbite primitive, qu'on nomme φ l'inclinaison de cette orbite sur ce plan, θ la longitude de son nœud ascendant, et v' la projection de v sur le plan fixe, en supposant que m ne quitte pas le plan de son orbite primitive, on aura, à très peu près,

$$v' - \theta = v - \tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \varphi \sin 2(v - \theta),$$
$$s = \operatorname{tang} \varphi \sin(v - \theta),$$

ou bien

$$v' - \theta = v - \tfrac{1}{2} s \operatorname{tang} \varphi \cos(v - \theta).$$

Si donc on fait croître la latitude s de δs, on aura

$$v' - \theta = v - \tfrac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \varphi \sin 2(v - \theta) - \tfrac{1}{2} \delta s \operatorname{tang} \varphi \cos(v - \theta).$$

On voit, par conséquent, que la variation de la latitude introduit dans l'expression de la longitude rapportée à un plan fixe, des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons; mais les termes qui en résultent sont insensibles même dans la théorie de Jupiter et de Saturne.

34. Nous allons considérer en particulier les inégalités

dépendantes du carré et des produits des excentricités et des inclinaisons. En ne portant l'approximation que jusqu'aux termes dépendans des premières puissances des excentricités et des inclinaisons, on a trouvé, n° 85 du livre II,

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{2} C^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + m'e D^{(i)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$
$$+ m'e' E^{(i)} \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'].$$

En supposant $l = 2$ dans les formules (4) et (7) (*), on trouve ainsi :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{r\delta r}{a^2} = \dfrac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}m'n^2.\left\{\begin{array}{l}(C^{(i)} + D^{(i)})e^2 \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + E^{(i)} ee' \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi' - \varpi]\end{array}\right\} \\ + m'n^2 \left[\dfrac{2(i-2)n}{i(n'-n) + 2n} ak - a^2 \dfrac{dk}{da}\right] . \cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \zeta]\end{array}\right\}}{[i(n'-n) + 3n]\,[i(n'-n) + n]} \\[2ex]
\delta v = \dfrac{2.d(r\delta r)}{a^2 n dt} - \dfrac{m'}{2} \left\{\begin{array}{l}(C^{(i)} + D^{(i)})e^2 \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ + E^{(i)} ee' \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi' - \varpi]\end{array}\right\} \\[2ex]
\quad + \left\{\dfrac{3(i-2)m'n^2}{[i(n'-n) + 2n]^2} ak - \dfrac{2m'na^2 \dfrac{dk}{da}}{i(n'-n) + 2n}\right\} \sin [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \zeta].
\end{array}\right\} (A)$$

En donnant à i toutes les valeurs positives et négatives, en y comprenant zéro, on aura toutes les inégalités du second ordre, dans lesquelles le coefficient de $n't$ surpasse celui de nt ou est surpassé par lui de deux unités.

Si la quantité $in' + (2 - i)n$ diffère peu de $\pm n$, l'un des diviseurs $i(n' - n) + 3n$ ou $i(n' - n) + n$ étant peu considérable, l'expression de $\frac{r\delta r}{a^2}$ peut acquérir une valeur sensible. Si la quantité $in' + (2 - i)n$ est très petite, les termes de l'expression de δv et

(*) Les valeurs de F, pages 141 et 142, doivent être changées de signes.

ceux de la valeur de $\frac{r\delta r}{a^2}$ qui ont cette quantité pour diviseur, pourront donner lieu à des inégalités considérables.

En désignant par $\frac{\delta' r}{a}$ la partie de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites et de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon$, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta' r}{a} = \frac{r\delta r}{a^2} &+ \frac{m'}{4}(C^{(i)} + 2D^{(i)})e^2 \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - 2\varpi] \\ &+ \frac{m'}{2} E^{(i)} ee' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi']. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

La fonction R renferme des termes de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons qui dépendent de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$. Supposons qu'en n'ayant égard qu'à ces termes on ait

$$R = m'k' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \rho].$$

En faisant $l = 0$ dans les formules générales (4) et (7), on aura pour les inégalités de $\frac{r\delta r}{a^2}$ et δv dépendantes du même argument,

$$\left.\begin{aligned} \frac{r\delta r}{a^2} &= \frac{\left\{\begin{aligned} &\tfrac{3}{2} m'n^2 . \left\{\begin{aligned} &D^{(i)} e^2 \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ &+ E^{(i)} ee' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \end{aligned}\right\} \\ &+ m'n^2 \left(\frac{2n}{n' - n} ak' - a^2 \frac{dk'}{da}\right) \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \rho] \end{aligned}\right\}}{[i(n' - n) + n]\,[i(n' - n) - n]} \\ \delta v &= \frac{2d(r\delta r)}{a^2 n dt} + \frac{m'}{2} \left\{\begin{aligned} &D^{(i)} e^2 \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ &+ E^{(i)} ee' \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \varpi - \varpi'] \end{aligned}\right\} \\ &+ \left\{\frac{3m'n^2}{i(n' - n)^2} ak' - \frac{2m'n}{i(n' - n)} a^2 \frac{dk'}{da}\right\} \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \rho] \end{aligned}\right\} \text{(C)}$$

Si la quantité $i(n' - n)$ diffère peu de $\pm n$, alors l'expression de $\frac{r\delta r}{a^2}$ peut acquérir une valeur sensible

en vertu de l'un des très petits diviseurs $i(n'-n)+n$ ou $i(n'-n)-n$ qu'elle renferme ; enfin si la quantité $i(n'-n)$ est très petite, c'est-à-dire si les moyens mouvemens des deux planètes diffèrent peu l'un de l'autre, il en résultera des inégalités qui peuvent devenir très sensibles dans l'expression des longitudes des deux planètes.

En désignant par $\frac{\delta' r}{a}$ la partie de $\frac{\delta r}{a}$ qui dépend de l'angle $i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$ et qui est de l'ordre des carrés des excentricités et des inclinaisons, on aura :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta' r}{a} = \frac{r\delta r}{a^2} &+ \frac{m'}{2}(2D^{(i)}-C^{(i)})e^2\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ &+ \frac{m'}{2}E^{(i)}ee'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+\varpi-\varpi'].\end{aligned}\right\} \quad (D)$$

i devant être pris avec le signe $+$ et avec le signe $-$ dans toutes ces formules. Les formules (C) et (D) introduisent, comme on voit, dans l'expression du rayon vecteur et de la longitude, des termes du second ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, qui dépendent des mêmes argumens que les termes indépendans de ces deux élémens.

Les formules (A), (B), (C) et (D) donneront toutes les inégalités du rayon vecteur et de la longitude, dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons ; mais comme leur nombre est trop considérable pour qu'on les puisse calculer toutes, on se bornera à déterminer celles qui sont assujetties à l'une des quatre conditions énoncées plus haut, et

qui, par cette raison, peuvent acquérir une valeur sensible.

Si l'une des inégalités de la longitude est susceptible de devenir, considérable il sera nécessaire, dans l'expression de δv, d'avoir égard à la variabilité des élémens des orbites, on pourra recourir alors à la formule générale (8), et elle donnera sans peine des formules applicables au cas où l'on considère les inégalités dépendantes du carré des excentricités et des inclinaisons.

35. Considérons maintenant les inégalités dépendantes des cubes des excentricités et des inclinaisons. Comme ces inégalités ne deviennent sensibles que par les petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir, on peut se borner à calculer les termes qui sont affectés de ces diviseurs.

Pour cela, supposons que par l'approximation précédente on ait

$$\frac{r\delta r}{a^2} = h \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \delta].$$

Le coefficient h étant affecté du très petit diviseur $i(n' - n) + 3n$. Il en résultera dans $\frac{\delta r}{a}$ le terme

$$h \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \delta].$$

Et cette valeur de $\frac{\delta r}{a}$ introduira dans l'équation différentielle (1) des termes dépendans de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon$, et des termes dépendans de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$, qui auront pour diviseur $i(n' - n) + 3n$, d'après ce que

nous avons dit n° 28; en ne considérant que ces termes, on aura

$$a^2n^2F\frac{\delta r}{a}=-\frac{3}{2}eh.a^2n^2.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+\delta]$$
$$-\frac{3}{2}eh.a^2n^2.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+\delta].$$

En faisant donc $l=3$ dans la formule générale (4), et en observant que l'on peut négliger $i(n'-n)+3n$ devant n dans les diviseurs de cette expression, on aura, en ne considérant que les termes qui ont $i(n'-n)+3n$ pour diviseurs,

$$\frac{r\delta r}{a^2}=-\frac{3}{2}eh\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+\delta]$$
$$+\frac{1}{2}eh\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+\delta]$$
$$+\frac{2(3-i)m'n}{i(n'-n)+3n}.ak\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon+C].$$

En vertu de cette valeur et de la précédente

$$\frac{r\delta r}{a^2}=h\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+\delta],$$

on aura pour la partie de $\frac{\delta r}{a^2}$ qui a pour diviseur $i(n'-n)+3n$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta r}{a}=&\,h\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon+\delta]\\&-eh\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon-\varpi+\delta]\\&+eh\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon+\varpi+\delta]\\&+\frac{2(3-i)m'n}{i(n'-n)+3n}.ak\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+3nt+3\varepsilon+C],\end{aligned}\right\}\text{(E)}$$

l'équation (5) peut s'écrire ainsi,

$$\delta v = \frac{2d.r\delta r - dr\delta r}{a^2 ndt} - 3a\int\int ndt.d\mathrm{R} - 2\int ndta^2 \frac{d\mathrm{R}}{da}.$$

En ne considérant que les termes qui dépendent de l'angle $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon$, et qui ont pour diviseur $i(n' - n) + 3n$, en vertu des valeurs précédentes de $\frac{r\delta r}{a^2}$ et $\frac{\delta r}{a}$, on trouve

$$\frac{2d.r\delta r - dr\delta r}{a^2 ndt} = -\left(\frac{i(n'-n)+n}{n} - \frac{1}{2}\right) eh \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + \delta]$$

La quantité $i(n' - n) + 3n$ étant très petite, dans le coefficient de cette inégalité on peut supposer, sans erreur sensible, $i(n' - n) = -3n$; la partie indépendante de R de la formule (5) introduira donc dans l'expression de δv le terme

$$+\tfrac{5}{2} eh \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon + \varpi + \delta].$$

En vertu de la valeur

$$\frac{r\delta r}{a^2} = h \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \delta];$$

le terme $\frac{2d.r\delta r}{a^2 ndt}$ introduit dans le δv, le suivant:

$$-\frac{i(n'-n)+2n}{n}.2h \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \delta],$$

ou bien en observant qu'on a à très peu près..... $i(n' - n) + 3n = 0$, le terme

$$+ 2h \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon + \delta];$$

le terme $-\frac{dr\delta r}{dt}$ donnera celui-ci:

$$-\tfrac{1}{2} eh \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon - \varpi + \delta].$$

En réunissant donc les différentes parties de δv; faisant $l = 3$ dans la formule générale (7), et en

ne considérant que les termes qui ont $i(n'-n)+3n$ pour diviseur, on aura

$$\left.\begin{aligned}\delta v = & -\frac{1}{2}eh \sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+3nt+3\epsilon-\varpi+\delta\right] \\ & -2h \sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+2nt+2\epsilon+\delta\right] \\ & +\frac{5}{2}eh \sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+nt+\epsilon+\varpi+\delta\right] \\ & +\left\{\frac{3(i-3)m'^2n^2}{[i(n'-n)+3n]^2}ak-\frac{2m'n}{i(n'-n)+3n}a^2\frac{dk}{da}\right\}\sin\left[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+3nt+3\epsilon+C\right]\end{aligned}\right\}\quad (F)$$

Les formules (E) et (F) donneront toutes les inégalités du troisième ordre croissant avec une grande lenteur, et qui peuvent devenir sensibles en acquérant par l'intégration un très petit diviseur.

36. On pourra donc, au moyen des formules des nos 28 et 29, déterminer toutes les inégalités de m dépendantes d'une puissance donnée des excentricités et des inclinaisons, qui peuvent avoir une valeur sensible. Mais lorsqu'il s'agit seulement, comme dans le numéro précédent, de calculer quelques inégalités particulières dépendantes d'un argument déterminé, il est plus simple d'employer la méthode de la variation des constantes arbitraires, qui donnera immédiatement toutes les inégalités d'un ordre quelconque, qui deviennent sensibles par les petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir, sans qu'on soit obligé de s'occuper des inégalités d'un ordre inférieur.

En effet, soit

$$m'k\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi],$$

l'un des termes du développement de R. D'après la loi de ce développement, no 4, i et l étant supposés positifs, et i plus grand que l, le coefficient m sera de l'ordre

l ou d'un ordre supérieur de deux, de quatre, etc., unités, relativement aux excentricités et aux inclinaisons ; en sorte que, si parmi les inégalités dépendantes de l'angle $i(n't-nt)+lnt$, on n'a égard qu'à celles qui sont de l'ordre le moins élevé, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, m sera de la forme $e^f e'^{f'} \lambda^{2f''} \text{A}$, f, f' et f'' étant des nombres tous trois positifs liés par l'équation $l-f-f'-2f''=0$ et A étant une fonction indépendante des excentricités et des inclinaisons des orbites. On aura donc

$$\frac{dk}{de} = fe^{f-1} e'^{f'} \lambda^{2f''} \text{A} = \frac{fk}{e},$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = 2f'' e^f e'^{f'} \lambda^{2f''-1} \text{A} = \frac{2f''k}{\lambda}.$$

Supposons maintenant que le terme

$$m'k\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi)$$

prenne la forme suivante :

$$m'\text{P}\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon]+m'\text{P}'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+lnt+l\varepsilon],$$

en comparant ces deux expressions, on aura

$$\left.\begin{aligned} \text{P} &= k\sin(f\varpi+f'\varpi'+2f''\Pi), \\ \text{P}' &= k\cos(f\varpi+f'\varpi'+2f''\Pi). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si l'on différentie par rapport à e, ϖ, λ, et Π ces expressions, et qu'à la place de $\frac{dk}{de}$ et de $\frac{dk}{d\lambda}$ on substitue leurs valeurs précédentes, on trouvera

$$\frac{d\text{P}}{d\varpi} = e\frac{d\text{P}'}{de}, \quad \frac{d\text{P}'}{d\varpi} = -e\frac{d\text{P}}{de},$$

$$\frac{d\text{P}}{d\Pi} = \lambda\frac{d\text{P}'}{d\lambda}, \quad \frac{d\text{P}'}{d\Pi} = -\lambda\frac{d\text{P}}{d\lambda}.$$

Cela posé, si pour abréger on fait $i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$

$+lnt+l\epsilon=\alpha$, et qu'on néglige les inégalités qui seraient d'un ordre supérieur à l, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, on trouvera, n° 17 (*), que le terme précédent du développement de R, introduit dans chacun des élémens de l'orbite de m les inégalités correspondantes qui suivent :

$$\delta a=-\frac{2m'a^2(i-l)n}{in'-(i-l)n}(\mathrm{P}\sin\alpha+\mathrm{P}'\cos\alpha),$$

$$\zeta=\frac{3m'a(i-l)n^2}{[in'-(i-l)n]^2}(\mathrm{P}'\sin\alpha-\mathrm{P}\cos\alpha),$$

$$\delta\epsilon=\frac{m'an}{in'-(i-l)n}\left[\left(\frac{1}{2}e\frac{d\mathrm{P}'}{de}-2a^2\frac{d\mathrm{P}'}{da}\right)\sin\alpha-\left(\frac{1}{2}e\frac{d\mathrm{P}}{de}-2a^2\frac{d\mathrm{P}}{de}\right)\cos\alpha\right],$$

$$\delta e=\frac{m'an}{in'-(i-l)n}\left(\frac{d\mathrm{P}}{de}\sin\alpha+\frac{d\mathrm{P}'}{de}\cos\alpha\right),$$

$$e\delta\varpi=\frac{m'an}{in'-(i-l)n}\left(\frac{d\mathrm{P}'}{de}\sin\alpha-\frac{d\mathrm{P}}{de}\cos\alpha\right),$$

$$p=-\frac{m'an\sin\gamma}{\lambda[in'-(i-l)n]}\left(\frac{d\mathrm{P}'}{d\lambda}\sin\alpha-\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda}\cos\alpha\right),$$

$$q=-\frac{m'an\lambda}{\sin\gamma\,[in'-(i-l)n]}\left(\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda}\sin\alpha+\frac{d\mathrm{P}'}{d\lambda}\cos\alpha\right).$$

Ces diverses inégalités peuvent devenir très sensibles, si le diviseur $in'-(i-l)n$ est une très petite quantité ; les plus considérables seront d'abord celles du moyen mouvement, à raison du très petit coefficient dont elles sont affectées, et ensuite celles de l'excentricité et de la longitude du périhélie, parce que l'ordre de ces inégalités se trouvant abaissé d'une unité par rapport au premier de ces élémens, et de deux unités par rapport au second, elles peuvent, par cette cause, devenir très sensibles si l'excentricité est très petite, et même surpasser les inégalités correspondantes du moyen mouvement, quoi-

(*) Les termes de δa, $\delta\zeta$, etc., donnés n° 17, ont été pris par erreur, avec un signe contraire.

qu'elles n'aient pour diviseur que la première puissance de la quantité $in'-(i-l)n$, comme la théorie des satellites de Jupiter en offre un exemple. C'est donc principalement aux inégalités de ces trois élémens qu'il faudra avoir égard dans la détermination des perturbations planétaires.

Il ne s'agit plus que d'introduire ces variations dans les formules du mouvement elliptique, pour avoir les formules qui conviennent au mouvement troublé. On a

$$v=\int ndt+\varepsilon+2e\sin\left(\int ndt+\varepsilon-\omega\right)$$
$$+\tfrac{5}{4}e^2\sin 2\left(\int ndt+\varepsilon-\omega\right)+\text{etc.}$$

Cette valeur de la longitude vraie étant celle que l'on obtient lorsque dans les formules de l'orbite elliptique on change le moyen mouvement nt en $\int ndt$, pour rendre ces formules applicables au mouvement troublé, conformément à ce que nous avons dit n° 43, livre II.

Si l'on différentie l'expression précédente par rapport à la caractéristique δ, en observant que l'on a $\int ndt=nt+\zeta$, et qu'on peut supposer $\int ndt=nt$ dans les termes qui sont de l'ordre des forces perturbatrices, puisqu'on néglige ici leur carré, en supprimant les termes qui après la substitution des valeurs de ζ, $\delta\varepsilon$, δe, etc., seraient d'un ordre supérieur à l, on aura

$$\delta v=\zeta+\delta\varepsilon+\delta e[2\sin(nt+\varepsilon-\omega)+\tfrac{5}{2}e\sin 2(nt+\varepsilon-\omega)]$$
$$-e\delta\omega[2\cos(nt+\varepsilon-\omega)+\tfrac{5}{2}e\cos 2(nt+\varepsilon-\omega)].$$

Si dans cette expression on substitue pour ζ, $\delta\varepsilon$, et $e\delta\omega$ leurs valeurs précédentes, et que pour abréger on fasse

$$\frac{m'an}{(i-l)n-in'}\cdot\frac{dk}{de}=h;$$

et $\mathit{6}=-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi$, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
\delta v=&\frac{3m'(i-l)n^2}{[i(n'-n)+ln]^2}\left\{\begin{aligned}&aP'\sin\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\\-&aP\cos\,[l(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\end{aligned}\right\}\\
&-\frac{2m'n}{i(n'-n)+ln}\left\{\begin{aligned}&a^2\frac{dP'}{da}\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\\-&a^2\frac{dP}{da}\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\end{aligned}\right\}\\
&-\frac{1}{2}eh\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon+\mathit{6}]\\
&+2h\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+(l-1)nt+(l-1)\epsilon+\varpi+\mathit{6}]\\
&+\frac{5}{2}eh\sin[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+(l-2)nt+(l-2)\epsilon+2\varpi+\mathit{6}].
\end{aligned}\right\}\text{(G)}$$

De même pour le rayon vecteur on a

$$\frac{r}{a}=1-e\cos(\int ndt+\epsilon-\varpi)$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2[1-\cos 2(\int ndt+\epsilon-\varpi)]+\text{etc.}$$

et en différentiant par rapport à δ

$$\frac{\delta r}{a}=\frac{\delta a}{a}+e\delta e-\delta e\,[\cos\,(nt+\epsilon-\varpi)+e\cos 2\,(nt+\epsilon-\varpi)]$$
$$-e\delta\varpi\,[\sin\,(nt+\epsilon-\varpi)+e\sin 2(nt+\epsilon-\varpi)].$$

En substituant pour δa, δe, $\delta\varpi$ leurs valeurs, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta r}{a}=&\frac{2m'(l-i)n}{i(n'-n)+ln}\left\{\begin{aligned}&aP\sin\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\\+&aP'\cos\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon]\end{aligned}\right\}\\
&-eh\cos\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon+\mathit{6}]\\
&+h\cos\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+(l-1)\,nt+(l-1)\epsilon+\varpi+\mathit{6}]\\
&+eh\cos\,[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+(l-2)\,nt+(l-2)\epsilon+2\varpi+\mathit{6}].
\end{aligned}\right\}\text{(H)}$$

Enfin, en vertu de l'équation (11) du n° 32, le terme $m'k\cos[i(n't-nt+\epsilon'-\epsilon)+lnt+l\epsilon-f\varpi-f'\varpi'-2f''\Pi]$ de la valeur de R produira dans l'expression de la la-

titude le suivant :

$$\delta s = \frac{2m'f''kan}{\lambda[i(n'-n)+ln]}\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+(l-1)nt+(l-1)\varepsilon-f\varpi-f'\varpi'-(2f''-1)\Pi]. \quad (K)$$

Si l'on fait maintenant $l=3$ dans les expressions précédentes, en observant qu'on a $\mathfrak{G}=\delta-\omega$, et que pour P et P' on substitue leurs valeurs en fonction de k et de $\mathfrak{G}$ données par les équations (12), on retrouvera les valeurs de δr, δv, δs que nous avons déduites, n° 35, des formules générales des n°s 28 et 29. L'accord des deux procédés est donc parfaitement vérifié, quel que soit le degré d'approximation que l'on veuille obtenir, ainsi que nous l'avions déjà établi dans le n° 91 du livre II, relativement aux termes dépendans des premières puissances des excentricités et des inclinaisons.

37. La méthode de la variation des élémens de l'orbite elliptique conduit très simplement, comme on voit, à la détermination des inégalités qui sont affectées de diviseurs qui les rendent considérables; mais s'il s'agissait de déterminer toutes les inégalités d'une planète dépendantes d'un argument déterminé, la multiplicité des termes qu'introduirait dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, la variation des élémens, rendrait ce procédé long et pénible; et dans ce cas, pour éviter des réductions trop compliquées, il sera mieux, comme nous l'avons dit, n° 88, livre II, de recourir aux formules générales qui résultent de l'intégration directe des équations différentielles du mouvement troublé.

Nous avons exposé dans le chapitre II, pour cal-

culer le coefficient d'un terme quelconque de l'expression de R en série, relatif à un argument déterminé, un procédé qui est indépendant des excentricités et des inclinaisons; et qui dispense d'effectuer le pénible développement de cette fonction. On aura de cette manière, sans beaucoup de calculs, les valeurs de P et P′ que l'on doit substituer dans les formules précédentes; et ce procédé, joint à la méthode de la variation des constantes arbitraires, est sans contredit le plus simple et le plus sûr qu'on puisse employer pour déterminer les inégalités d'une planète qui peuvent devenir sensibles quoiqu'elles soient, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, d'un ordre supérieur au second.

38. Reprenons les formules (G), (H) et (K).

Le cas de $l=3$ mérite une attention particulière, parce que c'est de lui que dépendent les deux grandes inégalités que l'observation avait fait remarquer depuis long-temps dans les mouvemens de Jupiter et de Saturne, et dont on avait vainement cherché la cause. En effet, en supposant que n se rapporte à Jupiter et n' à Saturne, si dans $i(n'-n)+ln$ on fait $l=3$ et $i=5$, ce diviseur devient $5n'-2n$, quantité très petite en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de ces deux planètes, nº 59, livre II; de sorte que les inégalités qui ont cette quantité pour diviseur peuvent devenir considérables, quoiqu'elles soient au moins du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Comme ces inégalités sont extrêmement importantes dans la théorie des mouvemens planétaires, nous

allons développer complètement les formules propres à les déterminer. Pour cela, désignons par m la masse de Jupiter et par m' celle de Saturne. En ne considérant que les termes du troisième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons qui dépendent de l'angle $5nt - 2nt$, on a, par le nº 4,

$$\begin{aligned}
R = {} & M^{(0)}e^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi) \\
& + M^{(1)}e^2e' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 2\varpi - \varpi') \\
& + M^{(2)}ee'^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - 2\varpi') \\
& + M^{(3)}e'^3 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - 3\varpi') \\
& + N^{(0)}e\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - 2\Pi) \\
& + N^{(1)}e'\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi).
\end{aligned}$$

Les valeurs de $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., étant déterminées par les formules générales du nº 7, dans lesquelles on fera $i = 5$, ce qui donne, en substituant en outre à la place de $A^{(i)}$ et de ses coefficiens différentiels, leurs valeurs en $b^{(i)}$, $\alpha \frac{db^{(i)}}{d\alpha}$, etc.,

$$a'M^{(0)} = -\frac{m'}{48}\left(380 b_{\frac{1}{2}}^{(5)} + 174\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 24\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \frac{m'}{16}\left(396 b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 184\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 25\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(2)} = -\frac{m'}{16}\left(402 b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 193\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 26\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(3)} = \frac{m'}{48}\left(389 b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + 201\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 27\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right).$$

$$a'N^{(0)} = -\frac{m'\alpha}{16}\left(7 b_{\frac{3}{2}}^{(4)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}\right),$$

$$a'N^{(1)} = \frac{m'\alpha}{16}\left(10 b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right)$$

Si l'on décompose l'expression précédente de R en sinus et en cosinus de l'angle $5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon$, et qu'on lui suppose cette forme :

$$R = m'P \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)$$
$$+ m'P' \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$

on aura

$$m'a'P = a'M^{(0)}e^3 \sin 3\varpi + a'M^{(1)}e^2e' \sin(2\varpi + \varpi') + a'M^{(2)}ee'^2 \sin(\varpi + 2\varpi')$$
$$+ a'M^{(3)}e'^3 \sin 3\varpi' + a'N^{(0)}e\lambda^2 \sin(\varpi + 2\Pi) + a'N^{(1)}e'\lambda^2 \sin(\varpi' + 2\Pi);$$

et la quantité $m'a'P'$ sera déterminée par la même expression dans laquelle on changera simplement les sinus en cosinus.

Cela posé, si l'on fait $l = 3$ et $i = 5$ dans les valeurs de δv et δr du numéro précédent, on aura, relativement à Jupiter, pour les inégalités de la longitude

$$\left.\begin{aligned}
\delta v = {} & \frac{m'n}{5n' - 2n} \cdot \left(\frac{6n}{5n' - 2n} aP' - 2a^2 \frac{dP'}{da} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\
& - \frac{m'n}{5n' - 2n} \cdot \left(\frac{6n}{5n' - 2n} aP - 2a^2 \frac{dP}{da} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\
& + 2h \sin(5n't - 3nt + 5\epsilon' - 3\epsilon + \delta) \\
& - \frac{1}{2} eh \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi + \delta) \\
& + \frac{5}{2} eh \sin(5n't - 4nt + 5\epsilon' - 4\epsilon + \varpi + \delta),
\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

et pour celle du rayon vecteur,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta r}{a} = {} & -\frac{4m'n}{5n' - 2n} \cdot \left[\begin{aligned} & aP \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\ + & aP' \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \end{aligned} \right] \\
& + h \cos(5n't - 3nt + 5\epsilon' - 3\epsilon + \delta) \\
& - eh \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi + \delta) \\
& + eh \cos(5n't - 4nt + 5\epsilon' - 4\epsilon + \varpi + \delta).
\end{aligned}\right\} \text{(L)}$$

En supposant $i = -2$ dans les formules (G) et (H), et en changeant tout ce qui est relatif à m en ce qui est relatif à m', et h en h', on aura des for-

mules analogues aux précédentes pour déterminer les inégalités du mouvement de Saturne troublé par Jupiter.

On trouvera ainsi

$$\left.\begin{aligned}\delta v' = &-\frac{mn'}{5n'-2n}\left(\frac{15n'}{5n'-2n}a'P' + 2a'^2\frac{dP'}{da'}\right)\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ &+\frac{mn'}{5n'-2n}\left(\frac{15n'}{5n'-2n}a'P + 2a'^2\frac{dP}{da'}\right)\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ &+ 2h'\sin(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+\delta')\\ &-\frac{1}{2}e'h'\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+\delta')\\ &+\frac{5}{2}e'h'\sin(3n't-2nt+3\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'+\delta'),\end{aligned}\right\}\text{(M)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta r'}{a'} = &\frac{10mn'}{5n'-2n}\cdot\left[\begin{aligned}&a'P\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +&a'P'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{aligned}\right]\\ &+h'\cos(4n't-2nt+4\varepsilon'-2\varepsilon+\delta')\\ &-e'h'\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'+\delta')\\ &+e'h'\cos(3n't-2nt+3\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'+\delta').\end{aligned}\right\}\text{(N)}$$

39. On doit observer que les quantités P et P′ conservent les mêmes valeurs, soit que l'on considère l'action de m' sur m, soit celle de m sur m', ce qui résulte de ce que dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}.$$

la partie $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$ ne produit aucun terme de l'ordre des cubes des excentricités dépendant de l'argument $5n't-2nt$, en sorte que ces termes ne peuvent résulter dans R que du développement de la partie $[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)]^{-\frac{1}{2}}$ qui est commune aux deux planètes.

Il suit de là que si l'on ne considère dans δv et $\delta v'$

que la partie qui a pour diviseur $(5n'-2n)^2$, et qui est la plus considérable de ces valeurs, on aura entre elles la relation

$$\delta v' = -\frac{5mn'^2a'}{2m'n^2a} \cdot \delta v.$$

ou bien en observant qu'en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, $5n'$ est à très peu près égal à $2n$, et que

$$\frac{n'}{n} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}},$$

$$\delta v = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \cdot \delta v'; \quad (15)$$

équation d'où l'on conclura la partie δv qui a $(5n'-2n)^2$ pour diviseur de la partie correspondante de $\delta v'$, et réciproquement.

Cette équation, d'ailleurs, n'est qu'un cas particulier d'une relation générale qui existe entre les inégalités à longues périodes des moyens mouvemens de deux planètes m et m', troublées par leur action mutuelle, et qui est fort utile dans la théorie des perturbations planétaires, parce qu'elle peut servir soit à déterminer l'une par l'autre ces inégalités, ce qui abrége beaucoup les opérations numériques, soit à vérifier leurs valeurs lorsqu'on les a calculées séparément.

On peut démontrer *à priori* cette relation de la manière suivante :

En nommant R' la valeur de R relative à l'action de m sur m', on aura, n° 43, livre II,

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= -\ 3an\int dt\int d'\mathrm{R}, \\ \zeta' &= -\ 3a'n'\int dt\int d''\mathrm{R}'. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

les différences $d'\mathrm{R}$, $d''\mathrm{R}'$ se rapportant dans chaque formule uniquement aux coordonnées de la planète troublée.

D'ailleurs, en faisant pour abréger

$$\Delta = [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$\mathrm{R} = m'\left(\Delta - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right),$$

$$\mathrm{R}' = m\ \left(\Delta - \frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right).$$

Si l'on multiplie par $(\mathrm{M}+m')m$ la première de ces valeurs, après l'avoir différentiée par rapport à x, y et z, que l'on multiplie de même par $(\mathrm{M}+m)m'$, la seconde différentiée par rapport à x', y', z', qu'ensuite on ajoute ces deux produits, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{M}+m')md'\mathrm{R}+(\mathrm{M}+m)m'd''\mathrm{R}' = (\mathrm{M}+m')mm'\left(d'\Delta - \frac{x'dx+y'dy+z'dz}{r'^3}\right) \\ +(\mathrm{M}+m)mm'\left(d''\Delta - \frac{xdx'+ydy'+zdz'}{r^3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Si dans cette équation on néglige les termes du troisième ordre par rapport aux masses perturbatrices, ce qui permet de faire $\frac{x}{r^3} = -\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{x'}{r'^3} = -\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{y}{r^3} = -\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., on aura

$$md'\mathrm{R} + m'd''\mathrm{R}' = mm'd \cdot \left(\Delta + \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2}\right).$$

La différentielle du second membre désignant une différentielle complète. On aura donc en intégrant

$$m\int d'\mathrm{R} + m'\int d''\mathrm{R}' = mm' \left(\frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{dt^2} + \Delta\right).$$

Supposons maintenant que l'on veuille déterminer les inégalités de ζ et de ζ' qui dépendent d'un argument donné $i'n't - int$, et qui ont $(i'n' - in)^2$ pour diviseur. Il faudra, dans l'équation précédente, considérer les termes qui dépendent de cet argument, et qui sont déjà divisés par $i'n' - in$, puisque ce sont les seuls qui puissent acquérir le carré de cette quantité pour diviseur en subissant une nouvelle intégration dans les valeurs de ζ et de ζ'. Or, il est évident que le second membre de l'équation précédente ne contient aucun terme semblable, tant qu'on n'a égard qu'aux quantités de l'ordre du carré des masses; en ne considérant donc que ces termes, on aura

$$m\int d'\mathrm{R} + m'\int d''\mathrm{R}' = 0.$$

Si l'on intègre une seconde fois cette équation, et qu'on substitue pour $\int dt \int d'\mathrm{R}$ et $\int dt \int d''\mathrm{R}'$ leurs valeurs tirées des formules (13), on aura

$$m'an\zeta + m'a'n'\zeta' = 0,$$

ou bien en observant que $n = a^{-\frac{3}{2}}$ et $n' = a'^{-\frac{3}{2}}$,

$$m\sqrt{a}\,\zeta + m'\sqrt{a'}\,\zeta' = 0,$$

d'où l'on tirera

$$\zeta' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \cdot \zeta.$$

Lorsqu'on aura calculé les inégalités de ζ qui ont $(i'n' - in)^2$ pour diviseur, cette équation donnera les inégalités correspondantes de ζ'.

La relation précédente, qui lie entre elles les inégalités à longue période de deux planètes soumises à leur action mutuelle, est la même que celle qui existe en général entre les variations séculaires des élémens elliptiques d'un système de planètes réagissant les unes sur les autres.

40. Considérons enfin les inégalités du mouvement en latitude : l'expression de R contient les deux termes suivans :

$$N^{(0)} e\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - 2\Pi),$$
$$N^{(1)} e'\lambda^2 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - 2\Pi).$$

En vertu de ces termes, on aura pour les inégalités de latitude, n° 36.

$$\delta s = \frac{2m'an}{5n' - 2n} \left[\begin{array}{l} e\lambda N^{(0)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \varpi - \Pi) \\ + e'\lambda N^{(1)} \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon - \varpi' - \Pi) \end{array} \right].$$

En changeant dans la formule (K) tout ce qui se rapporte à m dans ce qui est relatif à m' et réciproquement, et en observant que $N'^{(0)}$ et $N'^{(1)}$ désignant ce que deviennent $N^{(0)}$ et $N^{(1)}$ relativement à m', on a $N'^{(0)} = -\frac{m}{m'} N^{(0)}$, $N'^{(1)} = -\frac{m}{m'} N^{(1)}$, on aura pour l'inégalité correspondante du mouvement en latitude

de m'

$$\delta s' = -\frac{2man}{5n'-2n}\cdot\frac{m}{m'}\left[\begin{array}{l} e\lambda N^{(0)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi - \Pi) \\ + e'\lambda N^{(1)} \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' - \Pi) \end{array}\right],$$

Π désignant, comme dans ce qui précède, la longitude du nœud de l'orbite de m' sur l'orbite de m.

Ces inégalités peuvent s'élever à $4''$ à peu près pour Jupiter, et à $10''$ pour Saturne. Ce sont les seules inégalités de la latitude dépendantes du produit des excentricités et des inclinaisons, qui soient sensibles dans le système planétaire.

On a vu, dans le n° 33, que la valeur de δs introduit dans l'expression de la longitude rapportée à un plan fixe le terme $-\text{tang}\,\varphi\delta s\cos(v_{,} - \theta)$, en substituant donc pour δs sa valeur, il en résultera un terme dépendant de l'angle $5n't - 2nt$ qui devra être ajouté à la grande inégalité qui affecte la longitude de m; mais ce terme est insensible pour Jupiter et pour Saturne.

41. On déterminera, au moyen des formules précédentes, toutes les inégalités de l'ordre des cubes des excentricités et des inclinaisons, qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$, et qui peuvent devenir sensibles dans les longitudes, les latitudes et les rayons vecteurs de Jupiter et de Saturne, en vertu de la commensurabilité approchée de leurs moyens mouvemens. Comme les inégalités du mouvement en longitude sont très considérables, il sera nécessaire, dans δv et $\delta v'$, d'avoir égard aux variations séculaires des élémens elliptiques de m et de m'; pour cela, dans les expressions de ces deux quantités, à la place de $a\text{P}$ et de $a'\text{P}'$, on substituera les séries

$$aP + \frac{2adP}{(5n'-2n)dt} - \frac{3adP}{(5n'-2n)dt},$$

$$aP - \frac{2adP}{(5n'-2n)dt} - \frac{3adP}{(5n'-2n)dt},$$

et l'on déterminera les différences $\frac{dP}{dt}$, $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{d^2P'}{dt^2}$, comme on l'a expliqué n° 29.

42. D'après la théorie des perturbations planétaires, les inégalités dépendantes de l'angle $5n't-2nt$ doivent se reproduire parmi les termes du cinquième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons, et la petitesse du diviseur $5n'-2n$ oblige d'avoir égard à ces termes. Il sera facile de les déterminer par les formules précédentes du moment que l'on aura effectué le développement des termes du cinquième ordre de la fonction R qui dépendent de l'angle $5n't-2nt$; pour cela il suffira de faire $i=5$ dans l'expression de R du n° 16. On aura ainsi

$$\begin{aligned}
R = & M^{(0)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'-4\varpi)\\
&+M^{(1)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi)\\
&+M^{(2)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\varpi)\\
&+M^{(3)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi'-\varpi)\\
&+M^{(4)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-3\varpi')\\
&+M^{(5)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-4\varpi'+\varpi)\\
&+N^{(0)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-2\varpi+\varpi'-2\Pi)\\
&+N^{(1)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi-2\Pi)\\
&+N^{(2)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon-\varpi'-2\Pi)\\
&+N^{(3)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi-2\varpi'-2\Pi)\\
&+N^{(4)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi'-4\Pi)\\
&+N^{(5)}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon+\varpi-4\Pi).
\end{aligned}$$

et pour déterminer les quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., on aura

$$a'M^{(0)} = -\frac{m'e^4e'}{768}\left(41448\,b^{(6)}_{\frac{1}{2}} + 18392\,\alpha\frac{db^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 1780\,\alpha^2\frac{d^2b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} + 156\,\alpha^3\frac{d^3b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 29\,\alpha^4\frac{d^4b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - \alpha^5\frac{d^5b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \left\{\begin{aligned}
&\frac{m'e^3}{768}\left(11840\,b^{(5)}_{\frac{1}{2}} + 6560\,\alpha\frac{db^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 592\,\alpha^2\frac{d^2b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - 152\,\alpha^3\frac{d^3b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 26\,\alpha^4\frac{d^4b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - \alpha^5\frac{d^5b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\right)\\
&+\frac{m'e^3e'^2}{192}\left(38000\,b^{(5)}_{\frac{1}{2}} + 1640\,\alpha\frac{db^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 1180\,\alpha^2\frac{d^2b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - 230\,\alpha^3\frac{d^3b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 32\,\alpha^4\frac{d^4b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - \alpha^5\frac{d^5b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\right)\\
&+\frac{m'\alpha e^3\lambda^2}{384}\Bigg[554\left(b^{(4)}_{\frac{3}{2}} + b^{(6)}_{\frac{3}{2}}\right) + 222\left(\alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \alpha\frac{db^{(6)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right)\\
&\quad + 27\left(\alpha^2\frac{d^2b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^2\frac{d^2b^{(6)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right) + \left(\alpha^3\frac{d^3b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + \alpha^3\frac{d^3b^{(6)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right)\Bigg],
\end{aligned}\right\}$$

$$a'M^{(2)} = \left\{\begin{aligned}
&-\frac{m'e^4e'}{192}\left(10728\,b^{(4)}_{\frac{1}{2}} + 5432\,\alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 160\,\alpha^2\frac{d^2b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - 216\,\alpha^3\frac{d^3b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 29\,\alpha^4\frac{d^4b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - \alpha^5\frac{d^5b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\right)\\
&-\frac{m'e^2e'^3}{128}\left(33308\,b^{(4)}_{\frac{1}{2}} + 13672\,\alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 495\,\alpha^2\frac{d^2b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} - 309\,\alpha^3\frac{d^3b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} - 35\,\alpha^4\frac{d^4b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} - \alpha^5\frac{d^5b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\right)\\
&-\frac{m'\alpha e^2e'\lambda^2}{128}\Bigg[580\left(b^{(3)}_{\frac{3}{2}} + b^{(5)}_{\frac{3}{2}}\right) + 234\left(\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \alpha\frac{db^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}\right)\\
&\quad + 28\left(\alpha^2\frac{d^2b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^2\frac{d^2b^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2}\right) + \left(\alpha^3\frac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + \alpha^3\frac{d^3b^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right)\Bigg],
\end{aligned}\right\}$$

$$a'M^{(3)}=\left\{\begin{aligned}
&\frac{m'ee'^4}{192}\left(27348\,b_{\frac{1}{2}}^{(3)}+10592\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha}-266\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}-393\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-38\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4}-\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5}\right)\\
&+\frac{m'e^3e'^2}{128}\left(8844\,b_{\frac{1}{2}}^{(3)}+3906\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha}-348\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2}-285\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-32\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4}-\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^6}\right)\\
&+\frac{m'aee'^2\lambda^2}{128}\left[595\left(b_{\frac{1}{2}}^{(2)}+b_{\frac{3}{2}}^{(4)}\right)+245\left(\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha}+\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}\right)\right.\\
&\left.+29\left(\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}+\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}\right)+\left(\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right)\right],
\end{aligned}\right.$$

$$a'M^{(4)}=\left\{\begin{aligned}
&-\frac{m'e'^5}{768}\left(20267\,b_{\frac{1}{2}}^{(2)}+7223\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha}-1094\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}-482\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-41\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4}-\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5}\right)\\
&-\frac{m'e^2e'^3}{192}\left(6224\,b_{\frac{1}{2}}^{(2)}+2036\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha}-923\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2}-359\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right.\\
&\qquad\qquad\left.-35\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4}-\alpha^5\frac{d^6b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5}\right)\\
&-\frac{m'ae'^3\lambda^2}{384}\left[590\left(b_{\frac{3}{2}}^{(1)}+b_{\frac{3}{2}}^{(3)}\right)+255\left(\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha}+\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right)\right.\\
&\left.+30\left(\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}+\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right)+\left(\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right)\right],
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
a'M^{(5)}=\frac{m'ee'^4}{768}&\left(3138\,b_{\frac{1}{2}}^{(1)}-13\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha}-1556\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2}-438\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3}\right.\\
&\qquad\left.-38\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4}-\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^6}\right),
\end{aligned}$$

$$aN^{(0)} = -\frac{m'ae^2e'\lambda^2}{128}\left(580b^{(5)}_{\frac{3}{2}} + 86\alpha\frac{db^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 8\alpha^2\frac{d^2b^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \alpha^3\frac{d^3b^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'N^{(1)} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{m'ae^3\lambda^2}{128}\left(150b^{(4)}_{\frac{3}{2}} + 2\alpha\dfrac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 11\alpha^2\dfrac{d^2b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \alpha^3\dfrac{d^3b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right) \\ + \dfrac{m'aee'^2\lambda^2}{64}\left(686b^{(4)}_{\frac{3}{2}} + 66\alpha\dfrac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 13\alpha^2\dfrac{d^2b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \alpha^3\dfrac{d^3b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right), \end{array}\right\}$$

$$a'N^{(2)} = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{m'ae'^3\lambda^2}{128}\left(810b^{(3)}_{\frac{3}{2}} + 23\alpha\dfrac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 18\alpha^2\dfrac{d^2b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \alpha^3\dfrac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right) \\ -\dfrac{m'ae^2e'\lambda^2}{64}\left(140b^{(3)}_{\frac{3}{2}} - 30\alpha\dfrac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 16\alpha^2\dfrac{d^2b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - \alpha^3\dfrac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right), \end{array}\right\}$$

$$a'N^{(3)} = \frac{m'aee'^2\lambda^2}{128}\left(85b^{(2)}_{\frac{3}{2}} - 85\alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 21\alpha^2\frac{d^2b^{(2)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} - \alpha^3\frac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'N^{(4)} = -\frac{3m'\alpha^2e'\lambda^4}{256}\left(9b^{(4)}_{\frac{5}{2}} - \alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}\right),$$

$$a'N^{(5)} = -\frac{3m'\alpha^2e\lambda^4}{256}\cdot\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{5}{2}}}{d\alpha}.$$

Si l'on décompose les sinus et cosinus de l'expression de R en sinus et cosinus de l'angle $5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon$, on donnera à cette fonction la forme

$$m'Q\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)$$
$$+ m'Q'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$

et pour déterminer Q' on aura

$$\begin{array}{rl} m'Q' = & a'M^{(0)}\cos(4\varpi - \varpi') + a'M^{(1)}\cos 3\varpi + a'M^{(2)}\cos(\varpi' + 2\varpi) \\ & + a'M^{(3)}\cos(2\varpi' + \varpi) + a'M^{(4)}\cos 3\varpi' + a'M^{(5)}\cos(4\varpi' - \varpi) \\ & + a'N^{(0)}\cos(2\Pi + 2\varpi - \varpi') + a'N^{(1)}\cos(2\Pi + \varpi) + a'N^{(2)}\cos(2\Pi + \varpi') \\ & + a'N^{(3)}\cos(2\Pi - \varpi + 2\varpi') + a'N^{(4)}\cos(4\Pi - \varpi') + a'N^{(5)}\cos(4\Pi - \varpi), \end{array}$$

et Q sera donné par la même équation dans laquelle on changera les cosinus en sinus.

En substituant ces valeurs à la place de P et P′ dans les formules (K) et (L), on aura la partie de la longitude et du rayon vecteur de Jupiter, du cinquième ordre par rapport aux excentricités et relative à l'angle $5n't - 2nt$.

Les inégalités correspondantes de Saturne se détermineront de la même manière au moyen des formules (M) et (N). Soit $Q_{,}$ et $Q'_{,}$ ce que deviennent Q et Q′ par rapport à Saturne, on aura relativement à l'action de Jupiter sur cette planète

$$R' = mQ_{,} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ + mQ'_{,} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

On substituera $m'Q_{,}$ et $mQ'_{,}$ à la place de mP et de mP′ dans les valeurs de $\delta v'$ et de $\delta r'$, et l'on aura les inégalités de ces deux quantités qui dépendent à la fois des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, et de l'angle $5n't - 2nt$.

Comme cette partie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne est peu considérable relativement à celle que nous avons déterminée dans le numéro précédent, on pourra se borner à en calculer les termes principaux. Ce sont ceux qui sont affectés du très petit diviseur $(5n' - 2n)^2$, et qui sont introduits dans l'expression de la longitude par la variation du moyen mouvement. On pourra donc ici supposer simplement

$$\delta v = -3a\int n\,dt \int d'\text{R},$$
$$\delta v' = -3a\int n'dt \int d''\text{R}',$$

et par conséquent on aura encore entre les termes des

deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne qui dépendent des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons la relation ordinaire

$$\delta v = -\frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}} \cdot \delta v'.$$

d'où l'on conclura immédiatement la partie précédente de la grande inégalité de Jupiter, lorsque la partie correspondante de la grande inégalité de Saturne sera déterminée.

Il est aisé d'ailleurs de vérifier la relation précédente dans le cas que nous considérons. En effet, d'après la nature de la fonction mR, les termes de son développement qui renferment la quantité $A^{(1)}$ et ses différences sont les seuls qui ne sont pas communs aux deux planètes, en sorte que la quantité $M^{(0)}$ est la seule dont les valeurs différeront dans les expressions en série de mR et de m'R'. Lorsque l'on considère l'action de m' sur m on doit faire, n° 24, $A^{(1)} = \frac{b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{a'} - \frac{a}{a'^2}$, et dans le cas où l'on considère l'action de m sur m', il faut faire $A^{(1)} = \frac{b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{a'} - \frac{a'}{a^2}$. Si l'on suppose donc simplement $A^{(1)} = \frac{b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{a'}$, on aura rigoureusement $m\text{R} = m'\text{R}'$, et par conséquent $Q = Q_{,}$ et $Q' = Q_{,}$; il faudra ensuite dans les termes dépendans de $A^{(1)}$ et de ses différences, faire $A^{(1)} = -\frac{a}{a'^2}$, ce qui ajoutera à la valeur de $M^{(0)}$ la quantité

$-m' \frac{3125}{768} \cdot \frac{a}{a'}$; et quand on considérera l'action de m sur m', il faudra faire $A^{(1)} = -\frac{a'}{a^2}$, ce qui ajoutera à la valeur de $M^{(0)}$ la quantité $-m' \frac{500}{768} \cdot \frac{a^2}{a'^2}$. Mais par le rapport qui existe entre les mouvemens moyens de Jupiter et de Saturne, on a, à très peu près,

$$500 \cdot \frac{a'^2}{a^2} = 3125 \cdot \frac{a}{a'}.$$

En effet, $\frac{a^3}{a'^3} = \frac{n'^2}{n^2}$, et comme $5n'$ est à fort peu près égal à $2n$, on a $\frac{n'^2}{n^2} = \frac{4}{25}$; par conséquent,

$$500 = 3125 \frac{a^3}{a'^3} = 5^5 \frac{a^3}{a'^3}.$$

La valeur de $M^{(0)}$ est donc la même, soit que l'on considère l'action de m' sur m, soit que l'on considère l'action de m sur m'. Les formules qui déterminent la partie des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, dépendantes de la cinquième puissance des excentricités, deviennent donc

$$\delta v = \frac{6m'n^2}{(5n'-2n)^2} \cdot \begin{Bmatrix} aQ'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - aQ\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{Bmatrix},$$

$$\delta v' = -\frac{15mn'^2}{(5n'-2n)^2} \cdot \begin{Bmatrix} a'Q'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ - a'Q\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{Bmatrix}.$$

Et l'on pourra conclure, par conséquent, la valeur précédente de $\delta v'$ de celle de δv, en multipliant celle-ci par $-\frac{5mn'^2a'}{2m'n^2a}$, ou simplement par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$.

43. On rencontre dans la théorie de Mercure troublé par la Terre une inégalité du troisième ordre, à laquelle il faut également avoir égard, parce que le rapport qui existe entre les moyens mouvemens nt et $n't$ de ces deux planètes, rend très petite la quantité $nt - 4n't$, et peut rendre considérables, par conséquent, les inégalités dépendantes de cet argument. Toutefois, comme les inégalités de Mercure sont en général de peu d'importance, il suffira de considérer celles qui sont affectées du petit diviseur $(n - 4n')^2$, et qui sont introduites dans l'expression de la longitude par la variation du moyen mouvement. Pour les déterminer, supposons que m et m' désignent respectivement les masses de Mercure et de la Terre, on aura

$$\delta v = -3an\int dt\int d'R.$$

Si dans le développement de la fonction R on n'a égard qu'aux termes qui dépendent de l'angle $4n't - nt$ et qu'on suppose

$$R = m'P\sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) + m'P'\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon),$$

on aura

$$\delta v = \frac{3m'n^2}{(4n' - n)^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} aP'\sin(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon) \\ - aP\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon)\end{array}\right\}.$$

En faisant $i = 4$ dans les formules du n° 7, on trouve

$$\begin{aligned} R = {} & M^{(0)}e^3\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi) \\ & + M^{(1)}e^2e'\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi - \varpi') \\ & + M^{(2)}ee'^2\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\varpi') \\ & + M^{(3)}e'^3\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - 3\varpi') \\ & + N^{(0)}e\lambda^2\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - 2\Pi) \\ & + N^{(1)}e'\lambda^2\cos(4n't - nt + 4\varepsilon' - \varepsilon' - \varpi' - 2\Pi). \end{aligned}$$

Et pour déterminer $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., on aura

$$a'M^{(0)} = -\frac{m'}{48}\cdot\left(136b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 93\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 18\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \frac{m'}{16}\cdot\left(147b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 101\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 19\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(2)} = -\frac{m'}{16}\cdot\left(152b_{\frac{1}{2}}^{(2)} + 108\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} + 20\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'M^{(3)} = \frac{m'}{48}\cdot\left(142b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + 114\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} + 21\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3}\right),$$

$$a'N^{(0)} = -\frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(5b_{\frac{3}{2}}^{(3)} + \alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha}\right),$$

$$a'N^{(1)} = \frac{m'\alpha}{16}\cdot\left(8b_{\frac{3}{2}}^{(2)} + \alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha}\right).$$

En comparant la valeur précédente de R à celle que nous lui avons supposée, on trouvera

$$\begin{aligned} m'a'P = {} & a'M^{(0)}e^3\sin 3\varpi + a'M^{(1)}e^2e'\sin(2\varpi + \varpi') + a'M^{(2)}ee'^2\sin(2\varpi' + \varpi) \\ & + a'M^{(3)}e'^3\sin 3\varpi' + a'N^{(0)}e\lambda^2\sin(\varpi + 2\Pi) + a'N^{(1)}e'\lambda^2\sin(\varpi' + 2\Pi), \end{aligned}$$

et l'on aura pour déterminer $m'a'P'$, la même équation, dans laquelle on changera seulement les sinus en cosinus.

En réduisant ces formules en nombres, et en subs-

tituant ensuite pour $a'\mathrm{P}$ et $a'\mathrm{P}'$ leurs valeurs dans l'expression de δv, on aura sans difficulté la partie principale de l'inégalité de Mercure produite par l'action de la Terre. Cette inégalité, au reste, ne s'élève guère à plus d'une demi-seconde dans sa plus grande valeur; les termes que nous avons négligés peuvent donc être omis sans erreur sensible.

44. Il existe dans la théorie de la Terre troublée par Vénus une inégalité dépendante de l'angle $8nt - 13n't$, et par conséquent du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, à laquelle il faut avoir égard, parce que $8n - 13n'$ est une très petite quantité, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de ces deux planètes. En effet, l'excès de huit fois le moyen mouvement de Vénus sur treize fois celui de la Terre, est d'environ la $\frac{1}{240}$ partie du moyen mouvement annuel de la Terre; et cette circonstance donne lieu à une inégalité dont la période est de 240 ans environ, et dont l'influence est très sensible lorsque l'on compare entre eux des lieux du Soleil observés à de longs intervalles. Pour la déterminer, supposons que m soit Vénus et m' la Terre; comme cette inégalité est peu considérable, on peut négliger les termes qui n'ont pas $(13n' - 8n)^2$ pour diviseur, alors si l'on suppose

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = {} & m'\mathrm{P}\sin(13n't - 8nt + 13\varepsilon' - 8\varepsilon) \\ & + m'\mathrm{P}'\cos(13n't - 8nt + 13\varepsilon' - 8\varepsilon), \end{aligned}$$

on aura

$$\delta v = \frac{24m'n^2}{(13n'-8n)^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} aP'\sin(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon) \\ -aP\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon)\end{array}\right\},$$

$$\delta v' = -\frac{39mn'^2}{(13n'-8n)^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} a'P'\sin(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon) \\ -a'P\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon)\end{array}\right\},$$

les valeurs de P et P' étant les mêmes, soit que l'on considère l'action de m' sur m, soit que l'on considère l'action de m sur m', et $13n'$ étant à très peu près égal à $8n$, on aura entre δv et $\delta v'$ l'équation ordinaire de condition

$$\delta v' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta v.$$

En faisant $i=13$ dans les formules du n° 9, on aura

$$\begin{aligned}
R = {} & M^{(0)}e^5\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-5\varpi) \\
& + M^{(1)}e^4e'\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-4\varpi-\varpi') \\
& + M^{(2)}e^3e'^2\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-3\varpi-2\varpi') \\
& + M^{(3)}e^2e'^3\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon'-2\varpi-3\varpi') \\
& + M^{(4)}ee'^4\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-\varpi-4\varpi') \\
& + M^{(5)}e'^5\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-5\varpi') \\
& + N^{(0)}e^3\lambda^2\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-3\varpi-2\Pi) \\
& + N^{(1)}e^2e'\lambda^2\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-2\varpi'-\varpi'-2\Pi) \\
& + N^{(2)}ee'^2\lambda^2\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-\varpi-2\varpi'-2\Pi) \\
& + N^{(3)}e'^3\lambda^2\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-3\varpi'-2\Pi) \\
& + N^{(4)}e\lambda^4\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-\varpi-4\Pi) \\
& + N^{(5)}e'\lambda^4\cos(13n't-8nt+13\varepsilon'-8\varepsilon-\varpi'-4\Pi).
\end{aligned}$$

et l'on trouvera

$$a'M^{(0)} = -\frac{m'}{3840}\left(3850292\, b_{\frac{1}{2}}^{(13)} + 982847a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da} + 97520a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da^2} + 4700a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da^3} + 110a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da^5}\right),$$

$$a'M^{(1)} = \frac{m'}{768}\left(4067403\, b_{\frac{1}{2}}^{(12)} + 1043358a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da} + 103208a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da^2} + 4920a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da^3} + 113a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da^5}\right),$$

$$a'M^{(2)} = -\frac{m'}{384}\left(4287692\, b_{\frac{1}{2}}^{(11)} + 1106667a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da} + 109172a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da^2} + 5147a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da^3} + 116a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da^5}\right),$$

$$a'M^{(3)} = \frac{m'}{384}\left(4506953\, b_{\frac{1}{2}}^{(10)} + 1172595a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da} + 115417a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da^2} + 5381a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da^3} + 119a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da^5}\right),$$

$$a'M^{(4)} = -\frac{m'}{768}\left(4720917\, b_{\frac{1}{2}}^{(9)} + 1240926a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da} + 121948a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da^2} + 5622a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da^3} + 122a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da^5}\right),$$

$$a'M^{(5)} = \frac{m'}{3840}\left(4922215\, b_{\frac{1}{2}}^{(8)} + 1311366a\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da} + 128770a^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da^2} + 5870a^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da^3} + 125a^4\,\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da^4} + a^5\,\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da^5}\right),$$

$$aN^{(0)} = -\frac{m'a}{96}\left(8468\, b_{\frac{3}{2}}^{(12)} + 1284a\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{da} + 63a^2\,\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{da^3}\right),$$

$$aN^{(1)} = \frac{m'a}{32}\left(10330\, b_{\frac{3}{2}}^{(11)} + 1468a\,\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{da} + 68a^2\,\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{da^2} + a^3\,\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{da^3}\right),$$

$$a'N^{(2)} = -\frac{m'a}{32}\left(12149\, b_{\frac{3}{2}}^{(10)} + 1677a\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{da} + 73a^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{da^2} + a^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{da^3}\right),$$

$$a'N^{(3)} = \frac{m'a}{96}\left(14638\, b_{\frac{3}{2}}^{(9)} + 1911a\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{da} + 78a^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{da^2} + a^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{da^3}\right),$$

$$a'N^{(4)} = -\frac{3m'a^2}{256}\left(20b_{\frac{5}{2}}^{(11)} + a\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{da}\right),$$

$$a'N^{(5)} = +\frac{3m'a^2}{256}\left(27b_{\frac{5}{2}}^{(10)} + a\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(10)}}{da}\right).$$

En comparant entre elles les deux expressions précédentes de R, on aura

$$\begin{aligned} m'a'P' = {} & a'M^{(0)}e^5\cos 5\varpi + a'M^{(1)}e^4e'\cos(4\varpi+\varpi') + a'M^{(2)}e^3e'^2\cos(3\varpi+2\varpi') \\ & + a'M^{(3)}e^2e'^3\cos(2\varpi+3\varpi') + a'M^{(4)}ee'^4\cos(\varpi+4\varpi') + a'M^{(5)}e'^5\cos 5\varpi' \\ & + a'N^{(0)}e^3\lambda^2\cos(3\varpi+2\Pi) + a'N^{(1)}e^2e'\lambda^2\cos(2\varpi+\varpi'+2\Pi) \\ & + a'N^{(2)}ee'^2\lambda^2\cos(\varpi+2\varpi'+2\Pi) + a'N^{(3)}e'^3\lambda^2\cos(3\varpi'+2\Pi) \\ & + a'N^{(4)}e\lambda^4\cos(\varpi+4\Pi) + a'N^{(5)}e'\lambda^4\cos(\varpi'+4\Pi); \end{aligned}$$

et pour déterminer P il suffira de changer dans cette équation les cosinus en sinus.

En substituant ensuite ces valeurs dans les expressions de δv et de $\delta v'$, on aura la partie la plus sensible des inégalités de la Terre et de Vénus, résultant de leur action réciproque et dépendante de l'angle $13n't - 8nt$.

Ce calcul n'a de difficulté que son extrême longueur. C'est à M. Airy, savant professeur de l'Université de Cambridge, que l'on doit la découverte de l'inégalité précédente. Il est remarquable que la principale partie du coefficient de cette inégalité, qui s'élève à près de 3″ pour Vénus, et à 2″ seulement pour la Terre, résulte des termes dépendans de l'inclinai-

son mutuelle des orbites, termes que l'on n'avait pas suffisamment considérés jusqu'ici, et parmi lesquels on avait même cru pouvoir négliger tout-à-fait ceux qui renferment les puissances des inclinaisons supérieures à la seconde. Les termes qui dépendent uniquement des excentricités se compensent au contraire de telle sorte, en vertu de la position actuelle des périhélies des deux planètes, que leur ensemble ne fournit qu'un résultat à peu près insensible. On voit par cet exemple qu'il était nécessaire de donner au développement de la fonction R toute l'étendue à laquelle nous l'avons portée, et, en même temps, que nos formules suffisent jusqu'à présent à tous les cas qui peuvent se présenter.

45. Dans le chapitre IX du livre II nous avons donné les expressions des inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de m, en portant l'approximation jusqu'aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons; ce qui suffit dans la plupart des cas. Au moyen des formules précédentes, on pourra pousser les approximations aussi loin qu'on voudra; et nous avons donné, en particulier, l'expression des termes dépendans du carré des excentricités et des inclinaisons, et celle des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, en tenant même compte des termes du cinquième ordre. Il est rare que les besoins de l'Astronomie exigent davantage; on aura, en tous cas, recours aux formules générales, et les considérations qui obligeront de calculer quelque inégalité nouvelle, serviront à en faciliter la détermination. Les diverses inégalités de

r, v, s, ainsi calculées, s'ajouteront l'une à l'autre, en vertu de ce que les équations qui les déterminent sont linéaires, et l'on aura pour le rayon vecteur, pour la longitude et pour la latitude dans l'orbite troublée,

$$r + \delta r, \quad v + \delta v, \quad s + \delta s,$$

où r, v, s, désignent le rayon vecteur, la longitude et la latitude dans l'orbite elliptique, et δr, δv, δs, la somme des inégalités dont ces trois expressions sont affectées. Ces trois dernières quantités seront composées de termes de cette forme :

$$m'k \, {}^{\cos}_{\sin}[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + gnt + g\varepsilon + h],$$

g étant un nombre entier quelconque ou zéro, et k une fonction des excentricités ou des inclinaisons de l'ordre g, ou d'un ordre supérieur de deux, de quatre, etc., unités.

En effet, il résulte des lois du développement de la fonction R, et des formules qui déterminent les inégalités planétaires, que si une inégalité dépendante d'un argument déterminé se présente ponr la première fois parmi les termes de l'ordre g, elle ne se présentera plus ensuite que parmi les termes de l'ordre $g+2$, $g+4$, etc., et ainsi de suite. On pourra donc juger facilement à quel ordre appartient une inégalité dépendante d'un argument donné.

Chacune des planètes perturbatrices m', m'', etc., produira des termes semblables aux précédens, et la réunion de tous ces termes formera la valeur com-

plète du rayon vecteur de *m* et des inégalités de son mouvement, soit en longitude, soit en latitude.

Dans l'un des chapitres suivans nous donnerons les résultats de la réduction en nombres des formules précédentes, relativement aux sept planètes principales, et nous présenterons, avec une exactitude suffisante, la détermination de leurs principales inégalités.

CHAPITRE IV.

Inégalités dépendantes du carré des forces perturbatrices.

46. On est quelquefois obligé, dans la théorie des perturbations planétaires, de porter les approximations plus loin que nous ne l'avons fait jusqu'ici, et de considérer les inégalités dépendantes du carré des forces perturbatrices. La méthode la plus simple que l'on puisse employer pour les déterminer, est celle de la variation des constantes arbitraires dans les formules du mouvement elliptique. Il est toujours facile, en effet, d'obtenir par ce moyen les inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude d'une planète, lorsque l'on connaît les inégalités correspondantes de chacun des élémens de son orbite; on n'aura pas même à craindre ici que la complication des formules nuise à leur usage, parce que les considérations qui obligeront à avoir égard à quelques-unes des inégalités du second ordre, permettront toujours d'en négliger le plus grand nombre, comme absolument insensibles.

Nous avons présenté, dans le n° 61 du livre II, des formules qui donnent les variations du grand

axe et du moyen mouvement; en ayant égard aux termes dépendans du carré des forces perturbatrices, déterminons de la même manière les variations correspondantes des autres élémens de l'orbite elliptique. Pour cela, en indiquant par δ les variations dépendantes de la première puissance des masses, il faudra, dans les formules qui donnent les variations des élémens de l'orbite de m (n° 42, livre II), substituer à la place des élémens que ces formules renferment leurs valeurs augmentées de leurs variations δa, ζ, δe, etc., et $R + \delta R$ à la place de R, en nommant δR la variation de la fonction perturbatrice correspondante à celle des élémens de l'orbite elliptique que cette fonction renferme, et dépendante simplement de la seconde puissance des forces perturbatrices; en sorte qu'on a

$$\left.\begin{aligned}\delta R = {} & \frac{dR}{d\zeta}\zeta + \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{d\iota}\delta\iota + \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{d\varpi}\delta\varpi + \frac{dR}{dp}\delta p + \frac{dR}{dq}\delta q \\ & + \frac{dR}{d\zeta'}\zeta' + \frac{dR}{da'}\delta a' + \frac{dR}{d\iota'}\delta\iota' + \frac{dR}{de'}\delta e' + \frac{dR}{d\varpi'}\delta\varpi' + \frac{dR}{dp'}\delta p' + \frac{dR}{dq'}\delta q'.\end{aligned}\right\} (a)$$

Nous avons désigné par $d'R$ la différentielle de la fonction R prise par rapport aux coordonnées de la planète troublée, et sans faire varier celles de la planète perturbatrice; lors donc qu'on aura substitué à la place des coordonnées de m et de m' leurs valeurs en fonction du temps et des élémens de leurs orbites, augmentées de leurs variations, on aura la différentielle $d'(R + \delta R)$ de la fonction résultante, en différentiant, par rapport au temps introduit, par les coordonnées de la planète troublée et par leurs variations, sans faire varier le temps dépendant des

coordonnées de la planète perturbatrice ou de leurs variations, conformément à ce qui a été dit n° 60 livre II. Quant aux différences partielles de la fonction $R + \delta R$ relatives aux élémens de l'orbite elliptique, qui entreront dans les formules qui détermiment les variations de ces élémens, pour montrer comment on les obtiendra, désignons pour un moment par $\bar{R}$ cette fonction, et par $\bar{a} = a + \delta a$ l'un quelconque des élémens de l'orbite de m augmenté de sa variation. $\frac{d\bar{R}}{d\bar{a}}$ sera la quantité qu'il faudra substituer à la place de $\frac{dR}{da}$ dans les formules du n° 42 du livre II, lorsqu'on aura égard aux termes dépendans du carré des masses, mais il est clair que la valeur de $\frac{d\bar{R}}{d\bar{a}}$ est égale à celle de $\frac{dR}{da}$, dans laquelle on substituerait, à la place des élémens de l'orbite, leurs valeurs augmentées de leurs variations; en sorte qu'on aura

$$\frac{d\bar{R}}{d\bar{a}} = \frac{dR}{da} + \delta \cdot \frac{dR}{da}.$$

Or, d'après la valeur précédente de δR, il est aisé de voir que l'on a

$$\delta \cdot \frac{dR}{da} = \frac{d \cdot \delta R}{da},$$

la différentielle de δR relative à a devant être prise en faisant varier la constante a introduite par la substitution des valeurs des coordonnées elliptiques

de m, et en regardant comme constante celle qu'introduisent les variations de ces coordonnées, ainsi que celles des coordonnées de la planète perturbatrice m'.

Il faudra donc, pour avoir égard aux termes dépendans du carré des masses, substituer dans les formules du n° 42, livre II, à la place des élémens de l'orbite de m, que nous supposerons corrigés de leurs variations séculaires, leurs valeurs elliptiques augmentées de leurs variations périodiques, que nous désignerons par la caractéristique δ, et mettre ensuite $R + \delta R$ à la place de R, $\frac{dR}{da} + \frac{d.\delta R}{da}$ à la place de $\frac{dR}{da}$, et de même pour les différences partielles relatives aux autres élémens; ou bien, ce qui revient au même, on différentiera, par rapport à la caractéristique δ, les formules du numéro cité, en observant que dans les différences partielles de la fonction δR, relatives aux élémens de l'orbite elliptique de m, on doit regarder comme constantes les variations δa, ζ, $\delta a'$, etc., qui entrent dans l'expression de δR, ainsi que les quantités qui en dépendent.

Cela posé, en observant que $\frac{dR}{d\epsilon} = \frac{d'R}{ndt}$, on trouvera

$$da = 2a^2(d'\delta R + 4ad'R \int d'R), \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d\epsilon = & \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{d.\delta R}{de} - a\frac{dR}{de}\int d'R\right) \\ & - 2a^2ndt\left(\frac{d.\delta R}{da} + a\frac{dR}{da}\int d'R\right) \\ & + andt\left(1 - \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2\sqrt{1-e^2}}\right)\delta e\frac{dR}{de}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} de = &-\frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(d'\delta R - ad'R\int d'R\right) \\ &-\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{d.\delta R}{d\varpi} - a\frac{dR}{d\varpi}\int d'R\right) \\ &- andt.\delta e\left[\left(1-\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{dR}{ndt} - \frac{1}{e^2\sqrt{1-e^2}}.\frac{dR}{d\varpi}\right], \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} d\varpi = &\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{d.\delta R}{de} - a\frac{dR}{de}\int d'R\right) \\ &-\frac{andt}{e^2\sqrt{1-e^2}}\,\delta e\,\frac{dR}{de}, \end{aligned}\right\} (4)$$

$$dp = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d.\delta R}{dq} - a\frac{dR}{dq}\int d'R\right) + \frac{andt}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.e\delta e.\frac{dR}{dq}, \quad (5)$$

$$dq = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d.\delta R}{dp} - a\frac{dR}{dp}\int d'R\right) - \frac{andt}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.e\delta e.\frac{dR}{dp}. \quad (6)$$

Enfin, la formule (4) du n° 61 du livre II, en observant que l'on a

$$\int(d'R\int d'R) = \tfrac{1}{2}(\int d'R)^2,$$

donnera, pour la variation du moyen mouvement,

$$d\zeta = -3andt\int d'\delta R + \tfrac{3}{2}a^2ndt(\int d'R)^2. \quad (7)$$

Dans les formules précédentes, il faudra substituer à la place de δe sa valeur déterminée par l'équation (3) du n° 42 du livre II; et en intégrant ensuite ces formules, on aura les variations finies des élémens de l'orbite elliptique, dépendantes du carré des masses. Nous n'avons pas effectué ici cette substitution, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, afin de ne pas trop compliquer les formules.

47. Si de même, dans la valeur (a) de δR, on rem-

place les variations finies des élémens des orbites de m et de m' par leurs valeurs données par la première approximation, on pourra développer l'expression résultante en série de sinus et de cosinus d'angles proportionnels aux moyens mouvemens des deux planètes, de la même manière qu'on a développé la fonction R dépendante de la première puissance des masses; mais, dans certains cas, il sera préférable de déterminer la variation δR de la manière suivante.

Au lieu de regarder R comme une fonction des élémens des orbites de m et de m', et du temps t, on peut considérer cette quantité dans l'état où elle est donnée par les formules du mouvement troublé, c'est-à-dire comme fonction des coordonnées de la planète troublée et de la planète perturbatrice. Si l'on désigne donc respectivement par r, v, s, le rayon vecteur, la longitude et la latitude de m dans son orbite elliptique, et par δr, δv et δs les parties de ces coordonnées dues à l'action des forces perturbatrices, et dépendantes de la première puissance de ces forces, qu'on désigne par les mêmes lettres accentuées, les quantités correspondantes relatives à m', on aura

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s + \frac{dR}{dr'}\delta r' + \frac{dR}{dv'}\delta v' + \frac{dR}{ds'}\delta s'. \qquad (b)$$

La première approximation par les formules développées soit dans le livre II, soit dans les chapitres précédens, fera connaître les valeurs de δr, δv, δs, exprimées en suites de sinus et de cosinus des moyens mouvemens de m et de m', ordonnées par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et

des inclinaisons de leurs orbites. Nous avons donné, dans le n° 4, le moyen d'obtenir les valeurs des différences partielles $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dv}$, $\frac{dR}{ds}$, exprimées de la même manière; on pourra donc déterminer sans peine les termes de δR correspondans aux termes que l'on aura considérés dans chacun des facteurs des produits $\frac{dR}{dr}\delta r$, $\frac{dR}{dv}\delta v$, $\frac{dR}{ds}\delta s$, que cette fonction renferme. Il en serait de même relativement aux produits $\frac{dR}{dr'}\delta r'$, $\frac{dR}{dv'}\delta v'$, $\frac{dR}{ds'}\delta s'$; et il sera facile, par conséquent, de distinguer tous les termes de δR qui dépendent d'un argument donné, et de tel ordre qu'on voudra par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

On aura les termes correspondans de $d'\delta R$ en différentiant par rapport au temps t, introduit par les coordonnées de la planète troublée et par leurs variations δr, δv, δs, et en regardant comme constant celui qui dépend des coordonnées de la planète perturbatrice et des variations $\delta r'$, $\delta v'$ et $\delta s'$; enfin, on obtiendra les termes correspondans des différences partielles de δR relatives aux élémens du mouvement elliptique, en différentiant, par rapport à ces élémens, l'expression (b), sans faire varier ceux qui se trouveraient renfermés dans les valeurs des variations δr, $\delta r'$, δv, etc., conformément à ce que nous avons dit précédemment.

48. On déterminera donc de cette manière les inégalités des élémens de l'orbite de m, dépendantes de

la seconde puissance des forces perturbatrices; et en introduisant ces élémens corrigés de leurs variations ainsi obtenues, dans les formules du mouvement elliptique, on aura les inégalités correspondantes du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude : toutefois, comme les termes dépendans du carré des masses sont en général très peu considérables, on n'aura besoin d'avoir égard qu'à ceux qui, par l'effet de quelque circonstance particulière, peuvent devenir sensibles. Si, par exemple, il existe entre les moyens mouvemens de m et de m' un rapport tel que $i'n' - in$ soit une très petite quantité, i et i' représentant deux nombres entiers quelconques, les inégalités les plus considérables parmi celles qui dépendent du carré des masses, dans les mouvemens réciproques de ces deux planètes, seront, toutes choses égales d'ailleurs, les inégalités qui auront pour diviseurs les plus hautes puissances de cette quantité.

Or, les valeurs de ζ et de ζ' renferment des termes dépendans de l'angle $i'n't - int$, et qui ont $(i'n' - in)^2$ pour diviseur; en les combinant avec les termes des différences $\frac{dR}{d\zeta}$ et $\frac{dR}{d\zeta'}$, qui dépendent du même argument, il en résultera dans $\delta\zeta$ des termes dépendans de l'argument $2(i'n't - int)$, et qui, à cause de la double intégration, seront affectés du diviseur $(i'n' - in)^4$, et dans les variations des autres élémens des termes périodiques dépendans du même angle, mais affectés seulement du diviseur $(i'n' - in)^3$. Ces derniers termes, quoique sous

ce rapport moins considérables que les premiers, peuvent cependant produire, dans les expressions des excentricités et des longitudes des périhélies, des inégalités très sensibles, et qui même surpasseront celles du moyen mouvement, si les excentricités de m et de m' sont très petites, parce que leurs coefficiens seront d'un ordre moins élevé relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite n° 36 par rapport aux inégalités dépendantes de la première puissances des forces perturbatrices.

Les expressions de δa, δe, etc., renferment des termes dépendans de l'argument $i'n't - int$, et affectés du diviseur $i'n' - in$; en les combinant donc avec les termes de $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{de}$, etc, dépendans du même angle, il en résultera, dans l'expression du moyen mouvement, des termes dépendans, comme les précédens, de l'argument $2(i'n't - int)$, et qui auront $(i'n' - in)^3$ pour diviseur, et dans l'expression des autres élémens de l'orbite de m, des termes relatifs au même angle, mais affectés seulement du diviseur $(i'n' - in)^2$; cependant, il faudra encore avoir égard à ces termes, principalement dans les expressions des variations des excentricités et des périhélies, par la même raison que précédemment.

Enfin, si l'on considère les termes de la fonction δR qui dépendent simplement de l'argument $i'n't - int$, il est aisé de voir qu'il en résultera dans $\delta\zeta$, par la double intégration que ces termes subissent, des inégalités qui n'auront, il est vrai, pour

diviseur que la quantité $(i'n' - in)^2$, mais aussi qui seront simplement de l'ordre $i' - i$ relativement aux excentricités et aux inclinaisons, tandis que les inégalités relatives à l'angle $2(i'n't - int)$, qui sont affectées du diviseur $(i'n' - in)^4$, seront de l'ordre $(i' - i)^2$.

Lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices, l'expression du moyen mouvement est la seule qui contienne des inégalités dépendantes, comme les précédentes, de l'angle $i'n't - int$, et ayant $(i'n' - in)^2$ pour diviseur; et c'est elle, par conséquent, qui fournit alors la principale partie de la variation de la longitude moyenne; mais tous les élémens de l'orbite pourront contenir des inégalités semblables parmi celles qui sont de l'ordre du carré de la force perturbatrice. En effet, pour les obtenir, il suffira de combiner dans δR les termes des variations de δa, δe, etc., qui dépendent de l'angle $i'n't - int$, et qui sont divisés par $i'n' - in$, avec les parties constantes des différences $\frac{dR}{da}$, $\frac{dR}{de}$, etc.; il en résultera évidemment, par l'intégration dans δa, δe, etc., des inégalités relatives au même angle, et qui auront $(i'n' - in)^2$ pour diviseur. Ces termes seront donc comparables, sous tous les rapports, à ceux qui leur correspondent dans l'expression du moyen mouvement; et il ne sera pas permis de les négliger, du moment qu'on aura reconnu la nécessité d'avoir égard à ces derniers termes.

Les différentes inégalités que nous venons d'in-

diquer sont celles qui résultent, dans les expressions, des variations des élémens de l'orbite de m dépendantes du carré de la force perturbatrice de la fonction δR et de ses différences; mais il est clair que les autres termes des expressions différentielles de ces quantités introduiraient de même dans leurs valeurs finies des inégalités dépendantes de l'angle $i'n't - int$, et ayant pour diviseur $(i'n' - in)^2$, et des inégalités dépendantes du double de cet angle, et divisées par $(i'n' - in)^4$, $(i'n' - in)^3$ ou $(i'n' - in)$. Pour les déterminer, il suffirait d'examiner avec soin les différentes parties des formules générales (1), (2) etc.; mais comme ces inégalités ne deviennent assez considérables pour qu'on en tienne compte, que dans la théorie de quelques planètes, il sera plus simple de les développer, dans chaque cas particulier, selon l'importance qu'il présentera : les circonstances qui auront rendu leur considération nécessaire contribueront toujours à faciliter ce développement.

49. C'est principalement dans la théorie de Jupiter et de Saturne que la grandeur des deux inégalités qui affectent leurs mouvemens réciproques oblige à tenir compte des termes qui dépendent du carré des forces perturbatrices. Nous allons donc appliquer aux inégalités de cette espèce, qui peuvent devenir sensibles par le rapport qui existe entre les moyens mouvemens de ces deux planètes, les considérations précédentes.

Occupons-nous d'abord, parce que ce sont les plus faciles à déterminer, des inégalités relatives au double de l'argument de la grande inégalité, et qui

ayant pour diviseur la très petite quantité $(5n'-2n)^4$, peuvent acquérir, par cette raison, une valeur sensible, quoiqu'elles soient, comme on le verra, du second ordre par rapport à la force perturbatrice, et du sixième à l'égard des excentricités et des inclinaisons. Les inégalités de ce genre ne peuvent exister que dans l'expression du moyen mouvement. Reprenons donc la formule (7), et supposons que m représente Jupiter, m' Saturne, et que toutes les quantités relatives à m, marquées d'un accent, désignent les mêmes quantités relatives à m', en intégrant, on aura

$$\delta\zeta = -3an\int dt \int d'\delta\mathrm{R} + \frac{3a^2n}{2}\int dt\left(\int d'\mathrm{R}\right)^2.$$

Considérons d'abord le premier terme de cette expression. En n'ayant égard qu'aux inégalités dont nous nous occupons, on peut supposer, d'après ce qui précède,

$$\delta\mathrm{R} = \frac{d\mathrm{R}}{ndt}.\zeta + \frac{d\mathrm{R}}{n'dt}.\zeta'.$$

En ne considérant que les termes du développement de R qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$, soit

$$\mathrm{R} = m'\mathrm{P}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + m'\mathrm{P}'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon);$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\mathrm{R}}{ndt} = -2m'\mathrm{P}\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + 2m'\mathrm{P}'\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)],$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{n'dt} = 5m'\mathrm{P}\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - 5m'\mathrm{P}'\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)],$$

et par suite

$$\delta\mathrm{R} = m'(5\zeta' - 2\zeta)[\mathrm{P}\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - \mathrm{P}'\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)].$$

Pour avoir la différentielle $d'\delta R$, il faut faire varier dans cette expression ζ et nt; mais on peut rejeter d'abord la partie dépendante de la différentielle de ζ, parce qu'il n'en résultera dans $\delta\zeta$ que des termes relatifs à l'angle $2(5n't - 2nt)$, ayant $(5n' - 2n)^3$ pour diviseur; on trouvera ainsi

$$\frac{d'.\delta R}{ndt} = 2m'(5\zeta' - 2\zeta)[P\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + P'\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)].$$

On a d'ailleurs (n° 36)

$$\zeta = \frac{6m'n^2a}{(5n' - 2n)^2} \cdot \left\{ P'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - P\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\};$$

et au moyen de l'équation $\zeta' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \cdot \zeta$, on en conclut

$$\zeta' = -\frac{6mn^2a}{(5n' - 2n)^2}\sqrt{\frac{a}{a'}}\left\{ P'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - P\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right\}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouve

$$\frac{d'.\delta R}{ndt} = -\frac{6m'^2n^2a}{(5n' - 2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left\{ \begin{array}{l} (P'^2 - P^2)\sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ -2PP'\cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon). \end{array} \right\}$$

on aura donc, en vertu de ce terme,

$$\delta\zeta = -\frac{9m'^2n^4a^2}{2(5n' - 2n)^4}\left(\frac{5m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left\{ \begin{array}{l} (P'^2 - P^2)\sin 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ -2PP'\cos 2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon). \end{array} \right\}$$

Cette inégalité doit être ajoutée à la longitude moyenne de m dans l'expression elliptique de la longitude vraie. En la multipliant par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$, et faisant $\alpha = \frac{a}{a'}$, on en conclura pour la valeur correspondante de $\delta\zeta'$,

$$\delta\zeta' = \frac{9m^2n^4a^2a}{2(5n'-2n)^4}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

50. Considérons maintenant l'inégalité de $\delta\zeta$ relative à l'angle $2(5n't-2nt)$, et qui a $(5n'-2n)^3$ pour diviseur. Les termes qui la produisent peuvent résulter, 1°. de la partie de δR que nous venons de considérer, 2°. du deuxième terme de la formule (7); 3°. de la partie de δR qui dépend de la variation des élémens a, a', e, etc., des orbites de m et de m'. Déterminons successivement les différentes parties de cette inégalité.

L'expression de δR donne, en différentiant par rapport à ζ,

$$d'.\delta R = 2m'd\zeta\,[P'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)-P\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)],$$

et en substituant pour $d\zeta$ sa valeur,

$$\frac{d'\delta R}{ndt} = \frac{6m'^2na}{(5n'-2n)}.\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

et par suite

$$\delta\zeta = \frac{9m'^2n^3a^2}{2(5n'-2n)^3}.\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

Supposons maintenant

$$\delta\zeta = \tfrac{3}{2}a^2n\int dt\left(\int d'R\right)^2;$$

la valeur précédente de R donne, en la différentiant,

$$d'R = -2m'ndt\,[P\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)-P'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)],$$

et, par conséquent,

$$\int d'R = -\frac{2m'n}{5n'-2n}\,[P\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)+P'\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)].$$

En élevant cette valeur au carré, et en rejetant les termes non périodiques, on trouve

$$(\int d'R)^2 = \frac{2m'^2n^2}{(5n'-2n)^2}\left\{(P'^2-P^2)\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)+2PP'\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\right\},$$

et par suite

$$\delta\zeta = \frac{3m'^2n^3a^2}{2(5n'-2n)^3}.\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

Cette inégalité, jointe à la précédente, donne la suivante :

$$\delta\zeta = \frac{12m'^2n^3a^2}{2(5n'-2n)^3}.\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

On trouverait pour l'inégalité correspondante relative à m',

$$\delta\zeta' = \frac{75m^2n'^3a'^2}{2(5n'-2n)^3}.\left\{\begin{array}{l}(P'^2-P^2)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -2PP'\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-\epsilon).\end{array}\right\}$$

Ces deux inégalités, comme celles que nous avons précédemment déterminées, sont du sixième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, puisque P et P' sont au moins du troisième; mais ces dernières inégalités n'ayant pour diviseur que le cube de $5n'-2n$, tandis que les autres sont divisées par la quatrième puissance de cette quantité, elles sont nécessairement beaucoup moins considérables, et l'on s'est dispensé, jusqu'à présent, d'y avoir égard, les inégalités affectées du diviseur $(5n'-2n)^4$ devant fournir, en effet, la principale partie de la variation de la longitude moyenne relative à l'angle $2(5n't-2nt)$.

51. Supposons maintenant

$$\delta R = \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{d\epsilon}\delta\epsilon + \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{d\varpi}\delta\varpi + \frac{dR}{dp}\delta p + \frac{dR}{dq}\delta q,$$

en faisant abstraction des termes de δR qui sont relatifs à la variation des élémens de l'orbite de m'. Les différences partielles $\frac{dR}{da}$ dans cette expression, ainsi que dans celle de $\delta\epsilon$, doivent être prises en regardant n comme constant (n° 43, livre II).

Si l'on substitue pour δa, $\delta\epsilon$, δe et $\delta\omega$, leurs valeurs données par l'intégration des formules du n° 42, livre II, en observant que $\frac{dR}{d\epsilon} = \frac{dR}{ndt}$, et pour $\frac{dR}{dp}$, $\frac{dR}{dq}$, δp, δq, leurs valeurs données n° 4, on trouvera

$$\begin{aligned}\delta R = {} & 2a^2\left(\frac{dR}{da}\int d'R - \frac{dR}{ndt}\int ndt\frac{dR}{da}\right)\\ & + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{dR}{ndt}\int ndt\frac{dR}{de} - \frac{dR}{de}\int d'R\right)\\ & + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{d\varpi}\int ndt\frac{dR}{de} - \frac{dR}{de}\int ndt\frac{dR}{d\varpi}\right)\\ & + \frac{a}{\lambda\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\Pi}\int ndt\frac{dR}{d\lambda} - \frac{dR}{d\lambda}\int ndt\frac{dR}{d\Pi}\right)\\ & + \frac{a\lambda}{2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\nu}\int ndt\frac{dR}{d\lambda} - \frac{dR}{d\lambda}\int ndt\frac{dR}{d\nu}\right).\end{aligned}$$

Supposons, comme précédemment,

$$R = m'P\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + m'P'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon).$$

En faisant, pour abréger, $5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon = \alpha$, l'expression de δR prendra cette forme :

$$\delta R = -\frac{4m'^2a^2n}{5n'-2n}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{dP}{da}\sin\alpha+\frac{dP'}{da}\cos\alpha\right](P\sin\alpha+P'\cos\alpha)\\ -[P'\sin\alpha-P\cos\alpha]\left(\frac{dP}{da}\cos\alpha-\frac{dP'}{da}\sin\alpha\right)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{2m'^2a^2n\sqrt{1-e^2}}{(5n'-2n)e}\cdot(1-\sqrt{1-e^2})\cdot\left\{\begin{array}{l}[P\cos\alpha-P'\sin\alpha]\left(\frac{dP}{de}\cos\alpha-\frac{dP'}{de}\sin\alpha\right)\\ +\left[\frac{dP}{de}\sin\alpha+\frac{dP'}{de}\cos\alpha\right](P\sin\alpha+P'\cos\alpha)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{m'^2an\sqrt{1-e^2}}{(5n'-2n)e}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{dP}{d\varpi}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\varpi}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{de}\cos\alpha-\frac{dP'}{de}\sin\alpha\right)\\ -\left[\frac{dP}{de}\sin\alpha+\frac{dP'}{de}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\varpi}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\varpi}\sin\alpha\right)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{m'^2an}{(5n'-2n)\lambda\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{dP}{d\Pi}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\Pi}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\lambda}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\lambda}\sin\alpha\right)\\ -\left[\frac{dP}{d\lambda}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\lambda}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\Pi}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\Pi}\sin\alpha\right)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{m'^2an\lambda}{2(5n'-2n)\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{dP}{d\varpi}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\varpi}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\lambda}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\lambda}\sin\alpha\right)\\ -\left[\frac{dP}{d\lambda}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\lambda}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\varpi}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\varpi}\sin\alpha\right)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{m'^2an\lambda}{(5n'-2n)\sqrt{1-e^2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}[P\cos\alpha-P'\sin\alpha]\left(\frac{dP}{d\lambda}\cos\alpha-\frac{dP'}{d\lambda}\sin\alpha\right)\\ +\left[\frac{dP}{d\lambda}\sin\alpha+\frac{dP'}{d\lambda}\cos\alpha\right](P\sin\alpha+P'\cos\alpha).\end{array}\right\}$$

Si l'on opère, dans cette expression, les multiplications indiquées, on verra que le second membre se réduit à une quantité constante, de sorte que la fonction δR ne contient aucun terme périodique dépendant de l'angle $2(5n't-2nt)$ introduit par la variation des six élémens de l'orbite de la planète troublée ; le même résultat aurait lieu relativement aux élémens de l'orbite de m', ce qui tient à ce que tous les termes de la valeur de δR peuvent prendre, dans les deux cas, la forme générale $K\,(M\int N dt - N\int M dt)$, K étant un coefficient constant.

Pour avoir la différentielle de $d'\delta R$, il faut différentier l'expression précédente par rapport aux

seules quantités relatives à la planète m, c'est-à-dire d'après la forme que nous lui avons donnée, qu'il faudra ne faire varier le temps t dans les facteurs compris entre les crochets [ ] qu'autant qu'il est multiplié par n, et différentier complètement les facteurs compris entre les parenthèses ( ), et qui sont introduits par la variation des élémens de la planète troublée. Dans les deux cas, cette expression devient identiquement nulle, en sorte que les variations du grand axe, de l'excentricité, de l'inclinaison, des longitudes de l'époque, du périhélie et du nœud de l'orbite de la planète troublée, n'introduisent dans la fonction $d'\delta R$ aucun terme constant, ni aucun terme relatif à l'argument $2(5n't - 2nt)$. Il serait facile de s'assurer que le même résultat a lieu relativement aux variations des élémens de la planète perturbatrice. Il en résulte que le moyen mouvement de m, de même que celui de m', ne sont assujettis, en vertu des mêmes variations, à aucune inégalité croissante comme le carré du temps, ni à aucune inégalité à longue période dépendante de l'angle $2(5n't - 2nt)$; ce qui confirme, relativement aux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, le beau théorème de l'*invariabilité des grands axes et des moyens mouvemens planétaires*, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice, que nous devons à M. Poisson, et dont nous avons donné une démonstration générale dans le n° 60 du livre II (*).

(*) M. Poisson avait conclu (*Mémoires de l'Académie*, tome Ier) que le même résultat subsiste encore en portant

Les expressions de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ ne renferment donc aucune autre inégalité dépendante de l'angle $2(5n't - 2nt)$, et ayant pour diviseur $(5n' - 2n)^3$, que celles que nous avons déterminées n° 50. Les grands axes et les longitudes des époques renfermeront des inégalités semblables, et qu'il sera facile de développer d'après l'analyse précédente. Mais, comme on peut s'en assurer, ces inégalités seraient absolument du même ordre que les inégalités correspondantes du moyen mouvement, c'est-à-dire du second ordre par rapport à la force perturbatrice, et du sixième relativement aux excentricités et aux inclinaisons des orbites; et l'on pourra les négliger, comme nous l'avons dit, devant les inégalités du même ordre, et relatives au même argument, qui ont $(5n' - 2n)^4$ pour diviseur. Nous nous dispenserons, par cette raison, d'en effectuer ici le développement.

52. Considérons les variations des excentricités et des longitudes des périhélies relatives au même argument. Pour simplifier les formules, nous n'aurons

---

l'approximation jusqu'aux termes du troisième ordre, par rapport aux forces perturbatrices, mais il a reconnu depuis qu'il avait donné trop d'extension à son analyse. L'expression différentielle du demi-grand axe peut donc renfermer des termes constans du troisième ordre, relativement à ces forces, et le demi-grand axe en peut contenir qui soient seulement de l'ordre de leur carré; en sorte que le théorème sur l'invariabilité des grands axes n'a plus lieu au-delà de la première puissance de la force perturbatrice : nous en verrons un exemple dans la théorie de la Lune. (*Mémoires de l'Académie*, tome XIII.)

égard qu'à la partie de ces variations qui est de l'ordre le moins élevé possible, relativement aux excentricités et aux inclinaisons. Dans ce cas, on peut supposer simplement

$$\left.\begin{aligned} de &= -\frac{andt}{e}\left(\frac{d.\delta R}{d\varpi} - \frac{\delta e}{e}.\frac{dR}{d\varpi}\right), \\ d\varpi &= \frac{andt}{e}\left(\frac{d.\delta R}{de} - \frac{\delta e}{e}.\frac{dR}{de}\right). \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Déterminons d'abord les inégalités relatives à l'angle $2(5n't - 2nt)$, et qui ont $(5n' - 2n)^3$ pour diviseur. Elles résultent, comme on l'a vu précédemment, de la partie de δR qui dépend de la variation des moyens mouvemens de m et de m'; en ne considérant que ces termes, on peut supposer (n° 49)

$$\delta R = \frac{6m'^2an^2}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right).[P'\sin\alpha - P\cos\alpha](P'\sin\alpha - P\cos\alpha),$$

les quantités P et P' ne devant plus s'étendre ici qu'aux termes de la fonction R relatifs à l'angle $5n't - 2nt$, qui dépendent des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Pour avoir les différences partielles $\frac{d.\delta R}{d\varpi}$ et $\frac{d.\delta R}{de}$, il faudra, d'après ce que nous avons dit n° 46, différentier l'expression précédente par rapport à ϖ et par rapport à e, sans faire varier les constantes introduites dans δR par les variations des moyens mouvemens nt et $n't$. Pour cela, d'après la forme de cette expression, il suffira de différentier, relativement à ces constantes, les facteurs entre les crochets, en re-

gardant comme invariables les facteurs compris entre parenthèses. En observant qu'on a, par le n° 36,

$$\frac{dP}{d\varpi} = e\frac{dP'}{de}, \quad \frac{dP'}{d\varpi} = -e\frac{dP}{de},$$

on trouvera ainsi

$$\frac{d.\delta R}{ed\varpi} = \frac{3m'^2an^2}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right).\left\{\begin{array}{l} P\frac{dP'}{de} - P'\frac{dP}{de} \\ +\left(P\frac{dP'}{de} + P'\frac{dP}{de}\right)\cos 2\alpha \\ -\left(P'\frac{dP'}{de} - P\frac{dP}{de}\right)\sin 2\alpha, \end{array}\right\}$$

$$\frac{d.\delta R}{de} = \frac{3m'^2an^2}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right).\left\{\begin{array}{l} P\frac{dP}{de} + P'\frac{dP'}{de} \\ +\left(P\frac{dP}{de} - P'\frac{dP'}{de}\right)\cos 2\alpha \\ -\left(P\frac{dP'}{de} + P'\frac{dP}{de}\right)\sin 2\alpha, \end{array}\right\}$$

En substituant ces valeurs dans les formules (c), et en intégrant ensuite, on aura les inégalités correspondantes de δe et de $\delta\omega$.

Considérons maintenant la partie de δR qui résulte des variations des autres élémens des orbites de m et de m'. En n'ayant égard qu'aux inégalités dont nous nous occupons, on peut faire $\gamma = \lambda$, et en observant qu'on a

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{dP}{d\varpi} = e\frac{dP'}{de}, & \frac{dP'}{d\varpi} = -e\frac{dP}{de}, \\ \frac{dP}{d\varpi'} = e'\frac{dP'}{de'}, & \frac{dP'}{d\varpi'} = -e'\frac{dP}{de'}, \\ \frac{dP}{d\Pi} = \gamma\frac{dP'}{d\gamma}, & \frac{dP'}{d\Pi} = -\gamma\frac{dP}{d\gamma}. \end{array}\right\} \quad (d)$$

on peut supposer simplement

$$\begin{aligned}
\delta R = \frac{m'^2 an}{(5n'-2n)e}\cdot\Big\{ & \left[e\frac{dP'}{de}\sin\alpha - e\frac{dP}{de}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP'}{de}\sin\alpha - \frac{dP}{de}\cos\alpha\right) \\
& + \left[\frac{dP}{de}\sin\alpha + \frac{dP'}{de}\cos\alpha\right]\left(e\frac{dP}{de}\sin\alpha + e\frac{dP'}{de}\cos\alpha\right)\Big\} \\
+ \frac{mm'a'n'}{5n'-2n}\cdot\Big\{ & \left[\frac{dP'}{de'}\sin\alpha - \frac{dP}{de'}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP'}{de'}\sin\alpha - \frac{dP}{de'}\cos\alpha\right) \\
& + \left[\frac{dP}{de'}\sin\alpha + \frac{dP'}{de'}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{de'}\sin\alpha + \frac{dP'}{de'}\cos\alpha\right)\Big\} \\
- \frac{m'(m'an+ma'n')}{5n'-2n}\cdot\Big\{ & \left[\frac{dP'}{d\gamma}\sin\alpha - \frac{dP}{d\gamma}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP}{d\gamma}\cos\alpha - \frac{dP'}{d\gamma}\sin\alpha\right) \\
& - \left[\frac{dP}{d\gamma}\sin\alpha + \frac{dP'}{d\gamma}\cos\alpha\right]\left(\frac{dP'}{d\gamma}\cos\alpha + \frac{dP}{d\gamma}\sin\alpha\right)\Big\}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir les différences $\frac{d.\delta R}{d\varpi}$ et $\frac{d.\delta R}{de}$, il faudra, comme précédemment, différentier cette expression, en faisant varier les facteurs entre les crochets, et en regardant comme constans ceux qui sont compris entre parenthèses. En observant que, d'après les équations (d), on a

$$\frac{d^2P}{ded\varpi} = \frac{dP'}{de} + e\,\frac{d^2P'}{de^2}, \qquad \frac{d^2P'}{ded\varpi} = -\,\frac{dP}{de} - e\,\frac{d^2P}{de^2},$$

$$\frac{d^2P}{d\gamma d\varpi} = e\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}, \qquad \frac{d^2P'}{d\gamma d\varpi} = -\,e\,\frac{d^2P}{ded\gamma},$$

$$\frac{d^2P}{d\gamma d\Pi} = \frac{dP'}{d\gamma} + \gamma\,\frac{d^2P'}{d\gamma^2}, \qquad \frac{d^2P'}{d\gamma d\Pi} = -\,\frac{dP}{d\gamma} - \gamma\,\frac{d^2P}{d\gamma^2},$$

et en substituant pour δe sa valeur (n° 36),

$$\delta e = \frac{m'an}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{de}\sin\alpha + \frac{dP'}{de}\cos\alpha\right),$$

on trouvera, toute réduction faite,

$$\left(\frac{d.\delta R}{d\varpi}-\frac{\delta e}{e}.\frac{dR}{d\varpi}\right)=\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{m'^2ane}{5n'-2n}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dP}{de}\,\dfrac{d^2P'}{de^2}-\dfrac{dP'}{de}\,\dfrac{d^2P}{de^2}\\[2mm]
-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{dP'}{de}\right)^2-\left(\dfrac{dP}{de}\right)^2\right]\dfrac{\sin 2\alpha}{e}\\[2mm]
+\dfrac{dP}{ede}.\dfrac{dP'}{de}\cos 2\alpha\end{array}\right\}\\[2mm]
+\dfrac{mm'a'n'e}{5n'-2n}\left(\dfrac{dP}{de'}.\dfrac{d^2P'}{de\,de'}-\dfrac{dP'}{de'}.\dfrac{d^2P}{de\,de'}\right)\\[2mm]
+\dfrac{m'(m'an+ma'n')e}{5n'-2n}\left(\dfrac{dP}{d\gamma}\,\dfrac{d^2P'}{ded\gamma}-\dfrac{dP'}{d\gamma}\,\dfrac{d^2P}{ded\gamma}\right),
\end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{d.\delta R}{de}-\frac{\delta e}{e}.\frac{dR}{de}\right)=\left\{\begin{array}{l}
+\dfrac{m'^2an}{5n'-2n}.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dP}{de}\,\dfrac{d^2P}{de^2}+\dfrac{dP'}{de}\,\dfrac{d^2P'}{de^2}\\[2mm]
-2\dfrac{dP}{ede}.\dfrac{dP'}{de}\sin 2\alpha\\[2mm]
-\left[\left(\dfrac{dP'}{de}\right)^2-\left(\dfrac{dP}{de}\right)^2\right]\dfrac{\cos 2\alpha}{e}\end{array}\right\}\\[2mm]
+\dfrac{mm'a'n'}{5n'-2n}.\left(\dfrac{dP}{de'}\,\dfrac{d^2P}{de\,de'}+\dfrac{dP'}{de'}\,\dfrac{d^2P'}{dede'}\right)\\[2mm]
+\dfrac{m'(m'an+ma'n')}{5n'-2n}\left(\dfrac{dP}{d\gamma}\,\dfrac{d^2P}{ded\gamma}+\dfrac{dP'}{d\gamma}\,\dfrac{d^2P'}{ded\gamma}\right),
\end{array}\right\}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (c), et qu'après avoir intégré on joigne les inégalités résultantes à celles que nous avons déterminées précédemment, on trouvera, en n'ayant égard qu'aux parties non périodiques,

$$\begin{aligned}\delta e=&+\frac{3m'^2a^2n^3t}{(5n'-2n)^2}.\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left[P'\frac{dP}{de}-P\frac{dP'}{de}\right]\\
&+\frac{m'^2a^2n^2t}{5n'-2n}\left[\frac{dP'}{de}\,\frac{d^2P}{de^2}-\frac{dP}{de}\,\frac{d^2P'}{de^2}+\frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}-\frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}\right]\\
&+\frac{mm'aa'nn't}{5n'-2n}\left[\frac{dP'}{de'}\,\frac{d^2P}{dede'}-\frac{dP}{de'}\,\frac{d^2P'}{dede'}+\frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}-\frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\varpi=&\frac{3m'^2a^2n^3t}{(5n'-2n)^2e}.\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left[P\frac{dP}{de}+P'\frac{dP'}{de}\right]\\
&+\frac{m'^2a^2n^2t}{(5n'-2n)e}\left[\frac{dP}{de}\,\frac{d^2P}{de^2}+\frac{dP'}{de}\,\frac{d^2P'}{de^2}+\frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}+\frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}\right]\\
&+\frac{mm'aa'nn't}{(5n'-2n)e}\left[\frac{dP}{de'}\,\frac{d^2P}{dede'}+\frac{dP'}{de'}\,\frac{d^2P'}{dede'}+\frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}+\frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}\right].\end{aligned}$$

Ces termes croissant proportionnellement au temps t, introduisent dans les expressions des variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie, des inégalités dépendantes du carré des forces perturbatrices, qui deviennent très sensibles dans la théorie de Jupiter et de Saturne.

En considérant ensuite les termes périodiques, on aura

$$\delta e = -\frac{3m'^2 a^2 n^3}{2(5n'-2n)^3} \cdot \left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right) \left\{ \begin{array}{l} +\left(\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}'}{de}+\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}}{de}\right)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \\ +\left(\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}'}{de}-\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{de}\right)\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \end{array} \right\}$$

$$-\frac{m'^2 a^2 n^2}{4(5n'-2n)^2 e} \left\{ \begin{array}{l} +2\frac{d\mathrm{P}}{de}\cdot\frac{d\mathrm{P}'}{de}\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \\ +\left[\left(\frac{d\mathrm{P}'}{de}\right)^2-\left(\frac{d\mathrm{P}}{de}\right)^2\right]\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \end{array} \right\}$$

$$\delta \varpi = \frac{3m'^2 a^2 n^3}{2(5n'-2n)^3 e} \cdot \left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{de}-\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}'}{de}\right)\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \\ +\left(\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}}{de}+\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}'}{de}\right)\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \end{array} \right\}$$

$$-\frac{m'^2 a^2 n^2}{2(5n'-2n)^2 e^2} \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{d\mathrm{P}'}{de}\right)^2-\left(\frac{d\mathrm{P}}{de}\right)^2\right]\sin 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) \\ -2\frac{d\mathrm{P}}{de}\frac{d\mathrm{P}'}{de}\cos 2(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon). \end{array} \right\}$$

Ces formules détermineront les variations périodiques de l'excentricité et du périhélie de l'orbite de m, dues au carré des forces perturbatrices, et relatives au double de l'argument de la grande inégalité; ces variations introduisent dans l'expression de la longitude vraie une inégalité à longue période, qui acquiert une valeur sensible dans la théorie de Jupiter et de Saturne.

53. Pour la déterminer, en nommant v la longitude de m dans son orbite elliptique, et en ne considérant que le premier terme de l'équation du cen-

tre, on a

$$v = \int ndt + \varepsilon + 2e \sin\left(\int ndt + \varepsilon - \varpi\right).$$

Désignons, comme précédemment, par la caractéristique δ les variations dépendantes de la première puissance des forces perturbatrices, et par la caractéristique δ' celles qui sont dues au carré de ces forces. Si dans l'expression précédente on augmente les élémens de l'orbite de m considérée comme une ellipse variable de leurs variations, on aura dans l'orbite troublée

$$V = \int ndt + \varepsilon + \delta\varepsilon + \delta'\varepsilon + 2(e + \delta e + \delta' e)\sin\left(\int ndt + \varepsilon - \varpi + \delta\varepsilon + \delta'\varepsilon - \delta\varpi - \delta'\varpi\right);$$

la partie de cette valeur qui dépend simplement des masses m, m', etc., est celle que nous avons examinée dans la première approximation.

Si l'on développe donc l'expression précédente, en n'ayant égard qu'aux inégalités de l'ordre du carré de la force perturbatrice, qu'on observe que les inégalités de $\delta'\varepsilon$ et $(\delta\varepsilon)^2$, dépendantes de l'angle $2(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$, sont insensibles, n° 50, qu'on a d'ailleurs dans l'orbite troublée $\int ndt = nt + \zeta + \delta\zeta$, en sorte que les inégalités dépendantes du même angle, introduites par la variation du moyen mouvement, s'obtiennent en augmentant dans la partie elliptique, comme nous l'avons dit n° 49, l'angle nt de $\zeta + \delta\zeta$, la quantité $\delta\zeta$ étant déterminée par la formule du même numéro, on aura

$$\begin{aligned} \delta' v = &+ [2\delta' e - e(\delta\varpi)^2 + 2e\zeta\delta\varpi] \sin(nt + \varepsilon - \varpi) \\ &- [2e\delta'\varpi + 2\delta e\, \delta\varpi - 2\zeta\delta e] \cos(nt + \varepsilon - \varpi). \end{aligned}$$

Cette expression devrait contenir encore les deux

termes $+2e\delta\epsilon\,\delta\varpi$ et $+2\delta\epsilon\,\delta e$; mais ces termes, comme il est aisé de s'en convaincre, ne donneraient que des inégalités insensibles relativement à celles que nous considérons.

Si au lieu de δe on substitue dans cette expression sa valeur donnée n° 52, et au lieu de ζ et de $\delta\varpi$ leurs valeurs déterminées par les formules

$$\zeta = \frac{6m'an^2}{(5n'-2n)^2}\,[P'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) - P\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)],$$

$$e\delta\varpi = \frac{m'an}{5n'-2n}\left[\frac{dP'}{de}\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) - \frac{dP}{de}\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\right].$$

qu'on remplace ensuite $\delta'e$ et $\delta'\varpi$ par la partie périodique de leurs valeurs donnée par les formules précédentes, on verra que les inégalités qui ont $(5n'-2n)^2$ pour diviseur disparaissent d'elles-mêmes; et en négligeant les inégalités dépendantes de l'angle $nt+\epsilon$, parce qu'elles peuvent être supposées comprises dans l'équation du centre, on trouvera

$$\delta v = \frac{3m'^2a^2n^3}{(5n'-2n)^3}\left(\frac{5m\sqrt{a}+4m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(P'\frac{dP'}{de} - P\frac{dP}{de}\right)\sin(10n't-5nt+10\epsilon'-5\epsilon+\varpi) \\ -\left(P\frac{dP'}{de} + P'\frac{dP}{de}\right)\cos(10n't-5nt+10\epsilon'-5\epsilon+\varpi)\end{array}\right\}$$

Par une analyse semblable, on trouverait pour les variations séculaires de l'excentricité et de la longitude du périhélie de m', dues au carré de la force perturbatrice,

$$\begin{aligned}\delta e' = {} & \frac{3m^2a^3n^3t}{(5n'-2n)^2a'}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left[P'\frac{dP}{de'} - P\frac{dP'}{de'}\right] \\ & + \frac{m^2a'^2n'^2t}{5n'-2n}\left[\frac{dP'}{de'}\,\frac{d^2P}{de'^2} - \frac{dP}{de'}\,\frac{d^2P'}{de'^2} + \frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{de'd\gamma} - \frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{de'd\gamma}\right] \\ & + \frac{mm'aa'nn't}{5n'-2n}\left[\frac{dP'}{de}\,\frac{d^2P}{de\,de'} - \frac{dP}{de}\,\frac{d^2P'}{de\,de'} + \frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{de'd\gamma} - \frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{de'd\gamma}\right],\end{aligned}$$

$$\delta\varpi' = \frac{3m^2a^3n^3t}{(5n'-2n)^2a'e'}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left[P\frac{dP}{de'}+P'\frac{dP'}{de'}\right]$$
$$+\frac{m^2a'^2n'^2t}{(5n'-2n)e'}\left[\frac{dP}{de'}\frac{d^2P}{de'^2}+\frac{dP'}{de'}\frac{d^2P'}{de'^2}+\frac{dP}{d\gamma}\frac{d^2P}{de'd\gamma}+\frac{dP'}{d\gamma}\frac{d^2P'}{de'd\gamma}\right]$$
$$+\frac{mm'aa'nn't}{(5n'-2n)e'}\left[\frac{dP}{de}\frac{d^2P}{dede'}+\frac{dP'}{de}\frac{d^2P'}{dede'}+\frac{dP}{d\gamma}\frac{d^2P}{de'd\gamma}+\frac{dP'}{d\gamma}\frac{d^2P'}{de'd\gamma}\right];$$

et pour les variations périodiques de ces mêmes élémens, dépendantes de l'angle $2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)$, on aura

$$\delta e' = -\frac{3m^2a^3n^3}{2(5n'-2n)^3a'}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(P\frac{dP'}{de'}+P'\frac{dP}{de}\right)\sin 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +\left(P'\frac{dP'}{de'}-P\frac{dP}{de}\right)\cos 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{m^2a'^2n'^2}{4(5n'-2n)^2e'}\left\{\begin{array}{l}2\frac{dP}{de'}\frac{dP'}{de'}\sin 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +\left[\left(\frac{dP'}{de'}\right)^2-\left(\frac{dP}{de'}\right)^2\right]\cos 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon),\end{array}\right\}$$

$$\delta\varpi' = \frac{3m^2a^3n^3}{2(5n'-2n)^3a'e'}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(P\frac{dP}{de'}-P'\frac{dP'}{de'}\right)\sin 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ +\left(P\frac{dP'}{de'}+P'\frac{dP}{de'}\right)\cos 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{m^2a'^2n'^2}{2(5n'-2n)^2e'^2}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{dP'}{de'}\right)^2-\left(\frac{dP}{de'}\right)^2\right]\sin 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ -2\frac{dP}{de'}\frac{dP'}{de'}\cos 2(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon);\end{array}\right\}$$

d'où l'on conclura qu'en vertu des termes dépendans du carré de la force perturbatrice, la longitude vraie de Saturne est affectée de l'inégalité suivante :

$$\delta v' = \frac{3m^2a^3n^3}{(5n'-2n)^3a'}\left(\frac{3m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{array}{l}\left[P'\frac{dP'}{de'}-P\frac{dP}{de'}\right]\sin(9n't-4nt+9\varepsilon'-4\varepsilon+\varpi')\\ -\left[P\frac{dP'}{de'}+P'\frac{dP}{de'}\right]\cos(9n't-4nt+9\varepsilon'-4\varepsilon+\varpi').\end{array}\right\}$$

On peut déterminer immédiatement, et sans aucun calcul, les deux inégalités précédentes de δv et $\delta v'$ au moyen des inégalités déjà calculées dans

la première approximation. En effet, si l'on représente par $K \sin(5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon + B)$ l'inégalité de m dépendante de l'angle $5n't - 3nt + 5\varepsilon' - 3\varepsilon$, et par $\overline{H} \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + A)$ la grande inégalité, ou celle qui dépend de l'angle..... $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$, l'inégalité de δv, qui dépend de l'angle $10n't - 5nt + 10\varepsilon' - 5\varepsilon$ pourra se mettre sous cette forme :

$$\frac{1}{4} \frac{(5m\sqrt{a} + 4m'\sqrt{a'})}{m'\sqrt{a'}} \overline{H}K \sin(10n't - 5nt + 10\varepsilon' - 5\varepsilon + A + B). \text{ (*)}$$

Soit de même $K' \sin(4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon + B')$, l'inégalité de m' dépendante de l'angle $4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon$, et $-\overline{H}' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + A')$ la grande inégalité de m', l'inégalité précédente de $\delta v'$ pourra prendre cette forme :

$$\frac{1}{4} \frac{(3m\sqrt{a} + 2m'\sqrt{a'})}{m\sqrt{a}} \overline{H}'K' \sin(9n't - 4nt + 9\varepsilon' - 4\varepsilon + A + B').$$

54. Déterminons maintenant les inégalités des inclinaisons et des longitudes des nœuds, correspondantes

---

(*) Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que par les nos 35 et 36 on a $B = \varpi + \zeta$, $A = \zeta$, $K = -\frac{m'an}{5n' - 2n} \cdot \frac{dk}{de}$, $H = \frac{6m'an^2k}{(5n' - 2n)^2}$. Si l'on développe l'expression précédente, et qu'à la place de $k \sin\zeta$, $k \cos\zeta$, $\frac{dk}{de}\sin\zeta$, $\frac{dk}{de}\cos\zeta$, on substitue leurs valeurs en fonction de P et P', n° 30, on retrouvera identiquement l'inégalité de δv déterminée plus haut.

aux précédentes. Pour cela nous observerons que φ et φ' étant, comme précédemment, les inclinaisons des orbites de m et de m' sur un plan fixe, et α et α' les longitudes de leurs nœuds ascendans, si l'on nomme γ leur inclinaison mutuelle, et Π la longitude du nœud ascendant de m' compté sur l'orbite de m, et qu'on considère le triangle sphérique compris entre ces trois plans, on aura

$$\sin\gamma\sin(\Pi-\alpha)=\sin\varphi'\sin(\alpha'-\alpha),$$
$$\sin\gamma\cos(\Pi-\alpha)=\sin\varphi'\cos\varphi\cos(\alpha'-\alpha)-\sin\varphi\cos\varphi'.$$

Si l'on suppose donc

$$P_{,}=\sin\gamma\sin\Pi,\quad Q_{,}=\sin\gamma\cos\Pi,$$

et, comme précédemment,

$$p=\sin\varphi\sin\alpha,\quad p'=\sin\varphi'\sin\alpha',$$
$$q=\sin\varphi\cos\alpha,\quad q'=\sin\varphi'\cos\alpha',$$

en multipliant par $\sin\varphi$ les deux équations précédentes, on aura

$$P_{,}q-Q_{,}p=p'q-q'p,$$
$$P_{,}p+Q_{,}q=(pp'+qq')\sqrt{1-p^2-q^2}-(p^2+q^2)\sqrt{1-p'^2-q'^2}.$$

Si de ces équations on tire les valeurs de $P_{,}$ et $Q_{,}$, en observant qu'on a

$$\sqrt{1-p^2-q^2}=1-\frac{p^2+q^2}{1+\sqrt{1-p^2-q^2}},$$
$$\sqrt{1-p'^2-q'^2}=1-\frac{p'^2+q'^2}{1+\sqrt{1-p'^2-q'^2}},$$

on trouvera

$$P_{,}=p'-p-p\,\frac{pp'+qq'}{1+\sqrt{1-p^2-q^2}}+p\,\frac{p'^2+q'^2}{1+\sqrt{1-p'^2-q'^2}},$$
$$Q_{,}=q'-q-q\,\frac{pp'+qq'}{1+\sqrt{1-p^2-q^2}}+q\,\frac{p'^2+q'^2}{1+\sqrt{1-p'^2+q'^2}}.$$

Si, comme nous le faisons, on prend pour plan fixe celui de l'orbite de m à une époque donnée, p et q seront de l'ordre des forces perturbatrices, et l'on aura, aux quantités près de l'ordre du carré de ces forces

$$P_{,}=p'-p\sqrt{1-p'^2-q'^2},$$
$$Q_{,}=q'-q\sqrt{1-p'^2-q'^2}.$$

On a d'ailleurs $\sqrt{1-p'^2-q'^2}=\cos\gamma$; en négligeant donc les quantités de l'ordre du carré des inclinaisons mutuelles des orbites,

$$P_{,}=p'-p, \quad Q_{,}=q'-q.$$

Ces valeurs sont conformes à celles que nous avons trouvées n° 86, livre II; mais l'analyse précédente montre de quel ordre sont les quantités négligées.

Si l'on différentie par rapport à la caractéristique δ, en observant qu'en prenant pour l'origine d'où les longitudes sont comptées, l'intersection commune des deux orbites, ce qui suppose $\Pi=0$, on a $\delta P_{,}=\gamma\delta\Pi$, $\delta Q_{,}=\delta\gamma$, et que les inégalités de δp et $\delta p'$, de δq et $\delta q'$, sont liées d'ailleurs par les équations ordinaires,

$$\delta p'=-\frac{m\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a}}\,\delta p, \qquad \delta q'=-\frac{m\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a}}\,\delta q; \quad (e)$$

on aura

$$\delta\gamma = -\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\delta q, \quad \gamma\delta\Pi = -\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\delta p.$$

Maintenant, en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, en vertu des formules du n° 4, on a

$$dp = -\,andt.\,\frac{d.\delta R}{d\gamma}, \quad \delta q = andt\,\frac{d.\delta R}{\gamma d\Pi}.$$

En différentiant, par rapport à γ et à Π, les deux parties de la valeur de δR donnée plus haut, n° 52, et ne conservant que la partie constante de cette différentielle, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta R}{d\gamma} = {} & \frac{3m'^2an^2}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left(P\frac{dP}{d\gamma}+P'\frac{dP'}{d\gamma}\right)\\ & +\frac{m'^2an}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{de}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}+\frac{dP'}{de}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}\right)\\ & +\frac{mm'a'n'}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{de'}\,\frac{d^2P}{de'd\gamma}+\frac{dP'}{de'}\,\frac{d^2P'}{de'd\gamma}\right)\\ & +\frac{m'(m'an+ma'n')}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{d\gamma}\,\frac{d^2P}{d\gamma^2}+\frac{dP'}{d\gamma}\,\frac{d^2P'}{d\gamma^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta R}{\gamma d\Pi} = {} & \frac{3m'^2an^2}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left(P\frac{dP'}{d\gamma}-P'\frac{dP}{d\gamma}\right)\\ & +\frac{m'^2an}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{de}\,\frac{d^2P'}{ded\gamma}-\frac{dP'}{de}\,\frac{d^2P}{ded\gamma}\right)\\ & +\frac{mm'a'n'}{5n'-2n}\left(\frac{dP}{de'}\,\frac{d^2P'}{de'd\gamma}-\frac{dP'}{de'}\,\frac{d^2P}{de'd\gamma}\right).\end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de dp et dq, qu'on intègre, et qu'on remplace ensuite δp et δq par leurs valeurs dans les expressions de $\delta\gamma$ et de $\gamma\delta\Pi$, on trouvera

$$\delta\gamma = \frac{3m'^2a^2n^3t}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left(\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}}{d\gamma}-\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}'}{d\gamma}\right)$$
$$-\frac{m'^2a^2n^2t}{5n'-2n}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left(\frac{d\mathrm{P}}{de}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{de\,d\gamma}-\frac{d\mathrm{P}'}{de}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{de\,d\gamma}\right)$$
$$-\frac{mm'aa'nn't}{5n'-2n}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left(\frac{d\mathrm{P}}{de'}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{de'd\gamma}-\frac{d\mathrm{P}'}{de'}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{de'd\gamma}\right),$$

$$\gamma\delta\Pi = \frac{3m'^2a^2n^3t}{(5n'-2n)^2}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left(\frac{5m\sqrt{a}+2m'\sqrt{a'}}{m'\sqrt{a'}}\right)\left(\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{d\gamma}+\mathrm{P}'\frac{d\mathrm{P}'}{d\gamma}\right)$$
$$+\frac{m'^2a^2n^2t}{5n'-2n}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{matrix}\frac{d\mathrm{P}}{de}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{de\,d\gamma}+\frac{d\mathrm{P}'}{de}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{de\,d\gamma}\\ +\frac{d\mathrm{P}}{d\gamma}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{d\gamma^2}+\frac{d\mathrm{P}'}{d\gamma}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\gamma^2}\end{matrix}\right\}$$
$$+\frac{mm'aa'nn't}{5n'-2n}\left(\frac{m\sqrt{a'}+m'\sqrt{a}}{m'\sqrt{a}}\right)\left\{\begin{matrix}\frac{d\mathrm{P}}{de'}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{de'd\gamma}+\frac{d\mathrm{P}'}{de'}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{de'd\gamma}\\ +\frac{d\mathrm{P}}{d\gamma}\,\frac{d^2\mathrm{P}}{d\gamma^2}+\frac{d\mathrm{P}'}{d\gamma}\,\frac{d^2\mathrm{P}'}{d\gamma^2}.\end{matrix}\right\}$$

On déterminera, au moyen de ces expressions, les valeurs de $\delta\gamma$ et de $\gamma\delta\Pi$; on en conclura, en vertu des formules (*e*) et (*f*), celles des quantités δp, $\delta p'$, δp et $\delta q'$, et par suite les valeurs des quantités $\delta\varphi$, $\delta\alpha$, $\delta\varphi'$, $\delta\alpha'$, qui déterminent les variations des orbites de m et de m', résultantes de leur action réciproque et relatives à un plan fixe quelconque.

Les quantités $\delta\gamma$ et $\gamma\delta\Pi$, comme les valeurs de δe, $\delta\omega$, etc., sont encore affectées d'inégalités périodiques dépendantes de l'angle $2(5n't-2nt)$; mais comme elles sont absolument insensibles, nous n'aurons égard ici qu'aux inégalités séculaires.

55. Nous avons vu, dans le nº 78 du livre II, que les inégalités de cette espèce, dépendantes de la seconde puissance des forces perturbatrices, comme celles qui dépendent de la première approximation,

sont soumises à l'équation de condition suivante :

$$m\sqrt{a}e\delta e + m'\sqrt{a'}e'\delta e' + \frac{2mm'\sqrt{aa'}\gamma\delta\gamma}{m\sqrt{a}+m'\sqrt{a'}} = 0. \text{ (A)}$$

Les valeurs précédentes de δe, $\delta e'$ et $\delta\gamma$ doivent donc satisfaire à cette équation, et c'est en effet ce qu'il est facile de vérifier en y substituant successivement chacun des termes correspondans des valeurs de δe, $\delta e'$ et $\delta\gamma$; et en observant que P et P' étant des fonctions homogènes en e, e' et γ, de la troisième dimension, on a

$$e\frac{dP}{de} + e'\frac{dP}{de'} + \gamma\frac{dP}{d\gamma} = 3P,$$
$$e\frac{dP'}{de} + e'\frac{dP'}{de'} + \gamma\frac{dP'}{d\gamma} = 3P';$$

et que $\frac{dP}{de}$ et $\frac{dP}{d\gamma}$ étant des fonctions homogènes en e, e' et γ, de la seconde dimension, on a

$$e\frac{d^2P}{de^2} + e'\frac{d^2P}{dede'} + \gamma\frac{d^2P}{ded\gamma} = 2\frac{dP}{de},$$
$$e\frac{d^2P}{ded\gamma} + e'\frac{d^2P}{de'd\gamma} + \gamma\frac{d^2P}{d\gamma^2} = 2\frac{dP}{d\gamma},$$

et de même relativement à $\frac{dP'}{de}$ et $\frac{dP'}{d\gamma}$;

enfin, que d'après les valeurs de P et P' on a

$$\frac{dP}{d\gamma}\frac{d^2P'}{d\gamma^2} - \frac{dP'}{d\gamma}\frac{d^2P}{d\gamma^2} = 0.$$

La stabilité du système des deux planètes m et m' dépend de l'équation (A), comme on l'a vu n° 78,

livre II ; ce système est donc stable, c'est-à-dire que les excentricités et l'inclinaison mutuelle des orbites de Jupiter et de Saturne resteront toujours très petites, en ayant même égard aux variations séculaires dépendantes du carré de la force perturbatrice et du troisième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

56. Ce résultat n'est qu'une vérification particulière du théorème que nous avons démontré généralement n° 78, livre II, et en considérant un nombre quelconque de planètes circulant autour du Soleil. Il faut toutefois faire ici une remarque importante. Si les masses m, m', m'', etc., ainsi que les demi-grands axes a, a', a'', etc., et les excentricités e, e', e'', etc., des orbites, différaient beaucoup entre elles, comme cela a lieu dans notre système planétaire, il s'ensuivrait que les quantités $m\sqrt{a}e\delta e$, $m'\sqrt{a'}e'\delta' e'$, etc., pourraient se compenser entre elles, quoique les variations δe, $\delta e'$, etc., fussent très différentes. Les équations (e) et (l), n° 54, livre II, pourraient donc être satisfaites, sans qu'on en dût conclure que les oscillations des excentricités et des inclinaisons seront toujours comprises dans d'étroites limites. Il faut, dans ce cas, recourir à l'intégration des équations différentielles (P) et (c) des n°s 64 et 69 du livre II; si l'on n'a égard qu'aux variations séculaires, qu'on suppose

$$b = e \sin \omega, \quad c = e \cos \omega,$$
$$b' = e' \sin \omega', \quad c' = e' \cos \omega',$$
etc.

On sait qu'on satisfait au premier système en faisant

15..

$$b = M \sin(ht + l) + M_{1} \sin(h_{1}t + l_{1}) + M_{2} \sin(h_{2}t + l_{2}) + \text{etc.},$$
$$b' = M' \sin(ht + l) + M'_{1} \sin(h_{1}t + l_{1}) + M'_{2} \sin(h_{2}t + l_{2}) + \text{etc.},$$
etc.,

$$c = M \cos(ht + l) + M_{1} \cos(h_{1}t + l_{1}) + M_{2} \cos(h_{2}t + l_{2}) + \text{etc.},$$
$$c' = M' \cos(ht + l) + M'_{1} \cos(h_{1}t + l_{1}) + M'_{2} \cos(h_{2}t + l_{2}) + \text{etc.},$$
etc.,

l, l_{1}, l_{2}, etc., étant des constantes arbitraires en nombre égal à celui des équations (P); M, M', M'', etc., M_{1}, M'_{1}, M''_{1}, etc., M_{2}, M'_{2}, M''_{2}, etc., des systèmes de valeurs dont chacun renferme une arbitraire et des quantités déterminées, et enfin h, h_{1}, h_{2}, etc., les racines d'une équation d'un degré égal à celui des corps agissans que l'on considère.

Soit $X = 0$ cette équation. Si toutes ses racines sont réelles et inégales, les valeurs de b, c, b', etc., seront toutes composées de quantités périodiques; et, en vertu des équations $e = \sqrt{b^{2} + c^{2}}$, $e' = \sqrt{b'^{2} + c'^{2}}$, etc., il en sera de même à l'égard des excentricités e, e', etc. Si, de plus, les quantités M, M', M'', etc., sont supposées très petites et du même ordre que les excentricités des planètes principales à l'époque actuelle, les intégrales précédentes montrent que les quantités b, b', etc., c, c', etc., et par conséquent les excentricités qui s'en déduiront, varieront dans des rapports peu considérables, et seront, dans tous les temps, très petites, comme elles le sont aujourd'hui. Il en sera de même des inclinaisons qui dépendent d'un système d'équations absolument semblables. On démontre aisément, par les considérations exposées n° 65, livre II, et sans avoir besoin de résoudre l'équation

$X = 0$, que cette équation ne saurait admettre que des racines réelles et inégales ; mais il reste encore à calculer les quantités M, M′, M″, etc., qui sont des fonctions de ces racines, pour être assuré que l'ellipticité de l'orbite de chaque planète sera toujours comprise entre d'étroites limites qu'elle ne saurait dépasser (1) : c'est d'ailleurs le seul moyen de déterminer avec exactitude, pour un temps quelconque, les élémens des orbites planétaires. Jusqu'à présent on s'était contenté de donner leurs variations séculaires développées par rapport au temps, et en ne portant l'approximation que jusqu'à la seconde puissance; mais la connaissance plus exacte que nous avons maintenant des masses des planètes et des élémens de leurs orbites exige qu'on détermine ces variations d'une manière plus précise. Aussi, quoique la formation et la résolution de l'équation $X = 0$, lorsque l'on considère à la fois le système des sept planètes principales, demande de pénibles calculs; la nécessité d'établir avec certitude un point si important dans le système du monde, ne nous a pas permis d'hésiter à les entreprendre, et l'on verra que les résultats que nous avons obtenus confirment les conclusions auxquelles nous étions parvenus dans le chapitre VIII du livre II, en admettant comme un fait la petitesse des quantités M, M′, M″, etc., qui n'avaient pas encore été calculées.

Lorsqu'on veut avoir égard au carré des forces perturbatrices, il faut, dans les équations (P) et (*c*), n[os] 64

(*) *Voir* les notes à la fin du volume.

et 69, livre II, augmenter les quantités $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, etc., $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, etc., de leurs variations séculaires relatives à la seconde approximation, et déterminées par les formules précédentes. Ces équations alors ne sont plus linéaires, cependant on peut encore les intégrer par les méthodes ordinaires d'approximation. En effet, supposons d'abord qu'on ait égard aux quantités d'un ordre quelconque par rapport aux masses m, m', m'', etc., mais qu'on néglige dans les équations citées tous les termes qui dépendent des puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures à la première. Les équations qui en résulteront seront encore linéaires et à coefficiens constans; en les traitant comme on a traité les équations primitives (P) et (c), on en déduira une équation de la forme

$$X + X_1 + X_2 + \text{etc.} = 0, \qquad (\alpha)$$

qui remplacera l'équation $X = 0$, et dans laquelle le premier terme sera cette même quantité X de l'ordre des masses m, m', etc.; X_1 désignera une quantité du second ordre par rapport à ces masses, X_2 une quantité du troisième ordre, et ainsi de suite. Or, les racines de l'équation (α) se déduiront de celles de l'équation $X = 0$ par le procédé ordinaire des substitutions successives, et d'après les principes de cette méthode si les racines de cette équation sont toutes réelles et inégales, il en sera de même des racines de l'équation (α), qui se trouveront exprimées en séries ordonnées par rapport

aux produits et aux puissances des masses m, m', m'', etc. Les excentricités et les inclinaisons seront donc encore, dans ce cas, composées de quantités périodiques.

Si l'on considère maintenant les termes dépendans des cubes et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons, les équations (P) et (c) ne seront plus linéaires, et pour les intégrer il faudra recourir aux méthodes d'approximation. On supposera qu'on ait déterminé les valeurs des inconnues, en faisant d'abord abstraction des termes dépendans des puissances des excentricités supérieures à la première, mais en ayant égard à toutes les puissances des masses qu'on veut considérer. On substituera dans les équations proposées les premières valeurs approchées, et l'on déterminera les variations qu'il faut faire subir aux constantes qui entrent dans les intégrales, pour satisfaire à ces équations, lorsqu'on a égard aux termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. On parviendra ainsi, par des approximations successives, à déterminer les valeurs de ces quantités avec tel degré d'exactitude qu'on voudra, et toutes ces valeurs, d'après les principes de cette méthode d'approximation, conserveront la même forme que dans le cas où l'on n'a égard qu'à la première puissance des excentricités et des inclinaisons. Soit donc

$$Y + Y_1 + Y_2 + \text{etc.} = 0,$$

l'équation qui remplace l'équation (α), et dans la-

quelle Y est le premier membre de cette équation; Y_1 une quantité de l'ordre des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons, Y_2 une quantité de l'ordre de leurs quatrièmes puissances, etc. Toutes les racines de cette équation, résolue par la méthode ordinaire d'approximation, seront réelles et inégales si les racines de l'équation $Y = 0$ remplissent cette condition, et elles se trouveront exprimées en séries convergentes ordonnées comme les quantités Y, Y_1, etc., suivant les puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons.

Ainsi donc la stabilité du système planétaire est généralement assurée, quel que soit l'ordre des termes auquel on veut pousser les approximations, du moment qu'on a prouvé que les valeurs des excentricités et des inclinaisons résultantes de la première approximation ne sont composées que de quantités périodiques. Nous avions déjà démontré ce théorème au moyen des équations qui résultent du principe des aires, n° 78 du livre II, en étendant les approximations à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, et aux quantités du second ordre par rapport aux masses perturbatrices. La démonstration précédente, déduite de la considération même des équations différentielles qui déterminent les variations des excentricités et des inclinaisons, en est une confirmation nouvelle.

Le principe important de la stabilité du système du monde repose, comme on voit, sur deux conditions également indispensables : il faut, 1° que l'équation $X = 0$ ait toutes ses racines réelles et inégales,

2° que les valeurs de M, M′, M″, etc., qui sont des fonctions de ces racines, soient toutes de très petites quantités. On prouve, n° 65, livre II, que la première condition est remplie dans la supposition que tous les corps célestes circulent dans le même sens autour du Soleil. C'est en effet ce qui a lieu dans la nature; mais il était d'autant plus intéressant d'examiner ce qui résulterait de l'hypothèse, que quelques-uns des corps célestes tournent dans des sens opposés, que plusieurs géomètres avaient cru pouvoir avancer que l'hypothèse contraire n'était pas indispensable à la stabilité du système. M. Poisson a démontré, en ne considérant, il est vrai, que l'action mutuelle de deux planètes, que, dans ce cas, les excentricités seront encore des quantités périodiques, mais que les inclinaisons ne seront pas assujetties à cette condition, et qu'elles pourront croître indéfiniment avec le temps. Mais comme cette recherche n'est que de pure curiosité, nous ne nous y arrêterons pas ici, et nous renvoyons, sur ce point, au mémoire du savant géomètre (*).

57. Considérons maintenant les inégalités des élémens des orbites de Jupiter et de Saturne, de l'ordre du carré de la force perturbatrice, et qui dépendent simplement de l'argument $5n't - 2nt$ de la grande inégalité. Il est aisé de s'assurer que parmi ces termes les moins élevés, relativement aux excentricités et aux inclinaisons, sont ceux qui dépendent des cubes et des produits de trois dimensions de ces quan-

(*) *Connaissance des Tems* pour l'année 1836.

tités, et que les plus considérables sont ceux qui, après l'intégration, acquièrent le très petit diviseur $(5n' - 2n)^2$. Nous n'aurons donc égard ici qu'à ces termes, parce que ce sont eux qui fournissent nécessairement la partie principale des inégalités correspondantes des longitudes δv et $\delta v'$, que nous nous proposons de déterminer.

Occupons-nous d'abord des moyens mouvemens. En supposant que m représente Jupiter, m' Saturne, et que toutes les quantités relatives à m, marquées d'un accent, désignent les mêmes quantités relatives à m', pour déterminer les inégalités de $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$, on aura

$$\left.\begin{aligned} \delta\zeta &= -3an\int dt\int d'.\delta R + \frac{3a^2n}{2}\int dt\left(\int d'R\right)^2, \\ \delta\zeta' &= -3a'n'\int dt\int d''.\delta R' + \frac{3a'^2n'}{2}\int dt\left(\int d''R'\right). \end{aligned}\right\} \quad (o)$$

Les différentielles d' et d'' se rapportent uniquement, la première à la planète m, la seconde à la planète m', et devant être prises, par conséquent, en faisant varier dans chaque formule le temps t introduit par les coordonnées de la planète troublée, et en regardant comme constant le temps relatif aux coordonnées de la planète perturbatrice.

D'après la forme des fonctions δR et $\delta R'$, n° 47, il faudra, dans chacun des produits qui les composent, combiner entre eux les différens termes des deux facteurs, de manière que la somme ou la différence des argumens relatifs aux termes que l'on a considérés, soit égale à $5n't - 2nt$; c'est-à-dire que

si l'on désigne par lt l'argument du terme que l'on a considéré dans l'un des facteurs, et par $l't$ l'argument du terme correspondant dans l'autre facteur, que, pour fixer les idées, on suppose de plus que $n't$ soit toujours précédé du signe + dans lt et dans $l't$, il faudra qu'on ait

$$l' + l = 5n' - 2n \quad \text{ou} \quad l' - l = 5n' - 2n.$$

Il faudra, en outre, que la somme des exposans des excentricités et des inclinaisons dans ces termes ne surpasse pas trois.

Or, d'après les lois du développement de la fonction R, n° 4, et celles des différens termes des expressions de δr, $\delta r'$, δv, etc., il sera aisé de reconnaître que les valeurs de l et de l', qui satisferont à la première condition, seront

$$\begin{array}{lll}
l = 0 & \text{et} & l' = 5n' - 2n, \\
l = n', & & l' = 4n' - 2n, \\
l = 2n', & & l' = 3n' - 2n, \\
l = 3n, & & l' = 2n' - 2n, \\
l = n' - n, & & l' = 4n' - n, \\
l = 3n' - n, & & l' = 2n' - n.
\end{array}$$

Ces combinaisons sont au nombre de six, mais elles en fourniront douze, parce qu'on peut changer dans chacune d'elles l en l', et réciproquement.

Quant aux valeurs de l et de l' qui satisferont à la deuxième condition, leur nombre est indéfini, et l'on peut les comprendre sous ces quatre formes générales :

$$l = 5n' - 2n + i(n' - n) \quad \text{et} \quad l' = i(n' - n)$$
$$l = 5n' - 3n + i(n' - n) \quad l' = i(n' - n) - n,$$
$$l = 5n' - 4n + i(n' - n) \quad l' = i(n' - n) - 2n,$$
$$l = 5n' - 5n + i(n' - n) \quad l' = i(n' - n) - 3n,$$

i étant un nombre entier et positif quelconque.

Ces combinaisons sont doubles, comme les précédentes, parce qu'on peut y permuter les lettres l et l'.

On voit, d'après cela, que la partie des valeurs de $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ qui provient de la combinaison par voie de soustraction des argumens l et l' sera composée d'un nombre indéfini de termes, et que par conséquent il serait impossible de calculer rigoureusement les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$, et qui sont du troisième ordre par rapport aux excentricités des orbites, et du second par rapport aux masses perturbatrices. Mais comme les inégalités que ces termes produisent sont pour la plupart très petites, il suffira de tenir compte des plus considérables; en général, ce sont celles qui répondront aux moindres valeurs de i; et, en effet, on verra, lorsque nous réduirons en nombres les formules du chapitre précédent, que les inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, forment des séries qui décroissent avec beaucoup de rapidité à mesure que leur argument dépend d'un plus grand multiple des moyens mouvemens de la planète troublée et de la planète perturbatrice. Les premiers termes de ces séries seront donc, en général, les seuls qui puissent, par leur combinaison avec les

différences partielles de R et R', produire des inégalités sensibles dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$.

Considérons maintenant la seconde partie des formules (o). Il est évident que les seuls termes qui, après la double intégration, auront la très petite quantité $(5n'-2n)^2$ pour diviseur, sont ceux qui, dans les intégrales $(\int d'\mathrm{R})^2$ et $(\int d''\mathrm{R}')^2$, sont déjà divisés par $5n'-2n$. En nous bornant donc à déterminer ces termes, il faudra, pour les obtenir, combiner la partie constante des intégrales $\int d'\mathrm{R}$ et $\int d''\mathrm{R}'$ avec la partie de ces intégrales qui dépend de l'argument $5n't-2nt$.

La détermination des inégalités dépendantes des seconds termes des expressions de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ sera comprise, par conséquent, dans la première des combinaisons des argumens lt et $l't$, c'est-à-dire dans celle des argumens zéro et $5n't-2nt$.

Commençons par déterminer les inégalités relatives à cette combinaison.

Inégalités de $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens o *et* $5n't-2nt$.

58. Pour les déterminer, reprenons la première des formules (o), en n'ayant d'abord égard qu'à son premier terme.

Si l'on ne considère que la partie non périodique du développement de la fonction R, et qu'on néglige les termes dépendans des excentricités et des inclinaisons, on aura

$$\mathrm{R}=\frac{m'}{2}\,\mathrm{A}^{(0)},$$

et par conséquent

$$\delta R = \frac{m'}{2} \cdot \frac{dA^{(0)}}{da} \cdot \delta r + \frac{m'}{2} \cdot \frac{dA^{(0)}}{da'} \cdot \delta r'.$$

En prenant la différentielle $d'\delta R$, on ne doit faire varier dans cette équation que les coordonnées de m, c'est-à-dire qu'il faut différentier l'expression précédente par rapport à δr, en regardant $\delta r'$ comme constant. On aura ainsi

$$\frac{d' . \delta R}{ndt} = \frac{m'}{2} \cdot a \frac{dA^{(0)}}{da} \cdot \frac{d\delta r}{andt}.$$

Supposons qu'en n'ayant égard qu'aux termes du troisième ordre par rapport aux excentricités qui dépendent de l'angle $5n't - 2nt$ on ait

$$\frac{\delta r}{a} = F \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + f),$$

F étant déterminé par la première approximation et étant affecté du très petit diviseur $5n' - 2n$. En vertu de cette valeur on aura

$$\frac{d d' . \delta R}{ndt} = -\frac{m'(5n' - 2n)}{2n} \cdot aa' \frac{dA^{(0)}}{da} . F \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Et en multipliant cette expression par $\frac{3\alpha n^2}{(5n' - 2n)^2 \sin 1''}$, en supposant, comme dans le n° 18, $\alpha = \frac{a'}{a}$, on aura la partie correspondante de $\delta\zeta$ réduite en secondes.

On doit observer ici que la différentiation relative à la caractéristique d' introduisant dans $d'R$ le multiplicateur $5n' - 2n$, la valeur de $\delta\zeta$ ne semble af-

fectée, après la double intégration, que du diviseur $5n' - 2n$; mais comme la quantité F renferme implicitement le même diviseur, il en résulte que l'inégalité correspondante est réellement affectée du très petit diviseur $(5n' - 2n)^2$, et qu'elle est de l'ordre des quantités que nous considérons. Il n'est donc pas permis de la négliger, comme le suppose Laplace, (*Mécanique céleste*, n° 16, livre VI), et l'on verra qu'en effet cette inégalité s'élève à plus de 8″ sexagésimales relativement à Saturne. On peut, pour plus d'exactitude, substituer dans les équations précédentes, à la place de $\frac{m'}{2} A^{(0)}$, la partie non périodique de R, exacte jusqu'aux quantités du quatrième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et que nous avons désignée par F dans le n° 17.

Supposons réciproquement qu'en ne considérant que les termes dépendans des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons, on ait

$$R = m'P\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + m'P'\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Il faudra combiner avec cette valeur de R celles qui proviennent des parties constantes de δr et de $\delta r'$; nommons aF et a'F′ ces parties, en sorte qu'on ait

$$\frac{\delta r}{a} = F, \qquad \frac{\delta r'}{a'} = F',$$

il en résultera

$$\delta R = m'\left(a\frac{dP}{da}F + a'\frac{dP}{da'}F'\right)\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)$$
$$+ m'\left(a\frac{dP'}{da}F + a'\frac{dP'}{da'}F'\right)\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$

d'où en différentiant par rapport à nt, en regardant $n't$ comme constant, on tirera

$$\frac{a'd'.\delta R}{ndt} = -2m'\left(aa'\frac{dP}{da}F + a'^2\frac{dP}{da'}F'\right)\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)$$
$$+ 2m'\left(aa'\frac{dP'}{da}F + a'^2\frac{dP'}{da'}F'\right)\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon).$$

En multipliant cette expression par $\frac{3an^2}{(5n'-2n)^2\sin 1''}$, on aura la partie correspondante de $\delta\zeta$.

Considérons maintenant le second terme de la même formule. Supposons, comme précédemment,

$$R = m'P\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + m'P'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$

d'où en différentiant par rapport à nt, et en intégrant ensuite, on tire

$$\int dR = m'g - \frac{2m'n}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + P'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)],$$

g étant une constante arbitraire.

En ne considérant donc que les termes dépendans de l'argument $5n't - 2nt$, on aura

$$(\int dR)^2 = -\frac{4m'^2ng}{5n'-2n}.[P\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + P'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)].$$

On a d'ailleurs, n° 92, livre II,

$$g = -\frac{1}{3}a\frac{dA^{(0)}}{da}.$$

La première des formules (o) donnera donc, en

en vertu du terme précédent,

$$\delta\zeta = \frac{2m'^2a^2n^2}{(5n'-2n)^2}.aa'\frac{dA^{(0)}}{da}.[a'P'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)-a'P\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)].$$

En réunissant cette inégalité aux deux inégalités déterminées précédemment, on aura la valeur complète de $\delta\zeta$, résultante de la combinaison des argumens zéro et $5n't-2nt$.

59. Pour avoir la partie de $\delta\zeta'$ correspondante à celle de $\delta\zeta$ que nous venons de déterminer, reprenons la seconde des formules (o)

$$\delta\zeta' = -3a'n'\int dt\int d''.\delta R' + \frac{3a'^2n'}{2}\int dt(\int d''R')^2.$$

En suivant l'analyse du numéro précédent, et en supposant

$$\frac{\delta r'}{a'} = F'\cos(5n't+2nt+5\epsilon'-2\epsilon+f')$$

on trouvera

$$\frac{a'd'.\delta R'}{n'dt} = -\frac{m(5n'-2n)}{2n'}.a'^2\frac{d^2A^{(0)}}{da'}F'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon+f'),$$

et en multipliant cette expression par $\frac{3mn'^2}{(5n'-2n)^2\sin 1''}$, on aura l'inégalité que le terme précédent introduit dans la valeur de $\delta\zeta'$.

Réciproquement, soit

$$R' = mP\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) + mP'\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon),$$

et supposons, comme plus haut,

$$\frac{\delta r}{a} = F, \quad \frac{\delta r'}{a'} = F',$$

on trouvera

$$\delta R' = m\left(a\frac{dP}{da}F + a'\frac{dP}{da'}F'\right)\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$$
$$+ m\left(a\frac{dP'}{da}F + a'\frac{dP'}{da'}F'\right)\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

En différentiant cette valeur par rapport à $n't$, on aura

$$\frac{a'd.\delta R'}{dt} = 5mn'\left(aa'\frac{dP}{da}F + a'^2\frac{dP}{da'}F'\right)\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$$
$$- 5mn'\left(aa'\frac{dP'}{da}F + a'^2\frac{dP}{da'}F'\right)\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon).$$

Les quantités P, P′, F, F′ ayant ici les mêmes valeurs que dans le n° 58, comme on a à très peu près $5n' = 2n$, il est aisé de conclure que l'inégalité de $\delta\zeta'$ dépendante de la partie précédente de $\delta R'$ est liée à l'inégalité correspondante de $\delta\zeta$ par l'équation ordinaire de condition

$$\delta\zeta' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta\zeta.$$

Par l'analyse du n° 58 on verra que le second terme de l'expression de $\delta\zeta'$ produit le terme suivant:

$$\delta\zeta = \frac{5m^2n'^2}{(5n'-2n)^2}.a'^2\frac{dA^{(0)}}{da'}.[a'P'\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - a'P\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)].$$

En réunissant cette dernière inégalité aux deux précédentes, on aura la valeur complète de la partie de $\delta\zeta'$, dépendante de la combinaison des argumens zéro et $5n't - nt$.

Calcul des termes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui résultent de la combinaison des argumens 3n′t—nt *et* 2n′t—nt.

60. Le dernier terme de chacune des formules

(o) ne saurait produire dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ aucune inégalité dépendante de l'angle $5n't - 2nt$ et du troisième ordre relativement aux excentricités, lorsque l'on fait abstraction de la combinaison des argumens o et $5n't - 2nt$; il nous suffira donc de supposer désormais

$$\delta\zeta = -3an\int dt \int d'.\delta R,$$
$$\delta\zeta' = -3a'n'\int dt \int d'.\delta R'.$$

Parmi le nombre indéfini de combinaisons qui peuvent donner dans $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ des termes de la nature de ceux que nous considérons, nous n'aurons égard qu'à ceux qui proviennent de la double combinaison des argumens $3n' - n$ et $2n' - n$, parce que ce sont eux qui fournissent la principale partie des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne dépendantes du carré des forces perturbatrices. Il sera facile d'ailleurs d'étendre la même analyse au développement des termes résultant de l'une quelconque des combinaisons énumérées nº 57; c'est ce que j'ai fait dans un mémoire imprimé dans le recueil des *Savans étrangers* (1), je me contenterai donc d'en rapporter les résultats numériques, lorsque nous nous occuperons de réduire en nombres les formules relatives à la théorie des inégalités planétaires.

Considérons d'abord la valeur de $\delta\zeta$.

En n'ayant égard qu'aux termes dépendans de

---

(1) Mémoires de l'Académie, *Savans étrangers*, 1834.

l'angle $3n't - 2nt$ et du carré et des produits des excentricités et des inclinaisons, soit

$$
\begin{aligned}
R = {} & M^{(0)}e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\
& + M^{(1)}ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\
& + M^{(2)}e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') \\
& + M^{(3)}\lambda^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi);
\end{aligned}
$$

d'où résulte

$$
\begin{aligned}
\delta R = {} & (\delta v - \delta v')[3M^{(0)}e^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + 2M^{(1)}ee' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\
& \qquad + M^{(2)}e'^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi')] \\
& + (\delta v - 3\delta v')M^{(3)}\lambda^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\
& + \frac{\delta r}{a} \cdot \left[a\frac{dM^{(0)}}{da} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da} ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varpi - \varpi') \right. \\
& \qquad \left. + a\frac{dM^{(2)}}{da} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + a\frac{dM^{(3)}}{da} \lambda^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \right] \\
& + \frac{\delta r'}{a'} \cdot \left[a'\frac{dM^{(0)}}{da'} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + a'\frac{dM^{(1)}}{da'} ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \right. \\
& \qquad \left. + a'\frac{dM^{(2)}}{da'} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + a'\frac{dM^{(3)}}{da'} \lambda^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi \right].
\end{aligned}
$$

Si l'on différentie cette expression en faisant varier les trois quantités nt, δv, δr, et en regardant comme constantes les trois quantités $n't$, $\delta v'$ et $\delta r'$, on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{d'.\delta R}{ndt} = {} & (\delta v' - \delta v)[3M^{(0)}e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + 2M^{(1)}ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\
& \qquad + M^{(2)}e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi')] \\
& + (3\delta v' - \delta v)M^{(3)}\lambda^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \\
& + \frac{d.\delta v}{ndt} \cdot [3M^{(0)}e^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + 2M^{(1)}ee' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \\
& \qquad + M^{(2)}e'^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + M^{(3)}\lambda^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi] \\
& + \frac{d.\delta r}{andt} \cdot \left[a\frac{dM^{(0)}}{da} e^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da} ee' \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \right. \\
& \qquad \left. + a\frac{dM^{(2)}}{da} e'^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + a\frac{dM^{(3)}}{da} \lambda^2 \cos(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \right] \\
& + \frac{\delta r}{a} \cdot \left[a\frac{dM^{(0)}}{da} e^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da} ee' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \right. \\
& \qquad \left. + a\frac{dM^{(2)}}{da} e'^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + a\frac{dM^{(3)}}{da} \lambda^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \right] \\
& + \frac{\delta r'}{a'} \cdot \left[a'\frac{dM^{(0)}}{da'} e^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi) + a'\frac{dM^{(1)}}{da'} ee' \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - \varpi - \varpi') \right. \\
& \qquad \left. + a'\frac{dM^{(2)}}{da'} e'^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\varpi') + a'\frac{dM^{(3)}}{da'} \lambda^2 \sin(3n't - nt + 3\varepsilon' - \varepsilon - 2\Pi) \right].
\end{aligned}
$$

Supposons qu'en ne considérant que les termes dépendant de l'argument $2n't-nt$, et qui sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons, on ait

$$\frac{\delta r}{a} = eF\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'G\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi'),$$

$$\frac{\delta r'}{a'} = eF'\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'G'\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi'),$$

$$\delta v = eH\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'K\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi'),$$

$$\delta v' = eH'\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'K'\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi'),$$

Et en différentiant les valeurs de $\frac{\delta r}{a}$ et δv, on a

$$\frac{d.\delta r}{andt} = -\frac{(2n'-n)}{n}.[eF\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'G\sin(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi')],$$

$$\frac{\delta.\delta v}{ndt} = \frac{(2n'-n)}{n}.[eH\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi)+e'K\cos(2n't-nt+2\epsilon'-\epsilon-\varpi')].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $\frac{d'.\delta R}{ndt}$, et qu'on ne conserve que les termes qui dépendent de l'argument $5n't-2nt$, en faisant pour abréger

$$P^{(0)}=ee'^2\Big[\tfrac{1}{2}H'a'M^{(2)}+\frac{(n'-n)}{n}Ha'M^{(2)}+K'a'M^{(1)}+\frac{2(n'-n)}{n}Ka'M^{(1)}$$
$$+\tfrac{1}{2}F'a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Faa'\frac{dM^{(2)}}{da}+G'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Gaa'\frac{dM^{(1)}}{da}\Big],$$

$$P^{(1)}=e^2e'\Big[H'a'M^{(1)}+\frac{2(n'-n)}{n}Ha'M^{(1)}+\tfrac{3}{2}K'a'M^{(0)}+\frac{3(n'-n)}{n}Ka'M^{(0)}$$
$$+\tfrac{1}{2}F'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Faa'\frac{dM^{(1)}}{da}+\tfrac{1}{2}G'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Gaa'\frac{dM^{(0)}}{da}\Big],$$

$$P^{(2)}=e'^3\Big[\tfrac{1}{2}K'a'M^{(2)}+\frac{(n'-n)}{n}Ka'M^{(2)}+\tfrac{1}{2}G'a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Gaa'\frac{dM^{(2)}}{da}\Big],$$

$$P^{(3)}=e^3\Big[\tfrac{3}{2}H'a'M^{(0)}+\frac{3(n'-n)}{n}Ha'M^{(0)}+\tfrac{1}{2}F'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Faa'\frac{dM^{(0)}}{da}\Big],$$

$$P^{(4)}=e'\lambda^2\Big[\tfrac{3}{2}K'a'M^{(3)}+\frac{(n'-n)}{n}Ka'M^{(3)}+\tfrac{1}{2}G'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Gaa'\frac{dM^{(3)}}{da}\Big],$$

$$P^{(5)}=e\lambda^2\Big[\tfrac{3}{2}H'a'M^{(3)}+\frac{(n'-n)}{n}Ha'M^{(3)}+\tfrac{1}{2}F'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}-\frac{(n'-n)}{n}Faa'\frac{dM^{(3)}}{da}\Big],$$

On trouvera

$$\frac{a'd'.\delta R}{ndt} = P^{(0)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi - 2\varpi')$$
$$+ P^{(1)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 2\varpi - \varpi')$$
$$+ P^{(2)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 3\varpi')$$
$$+ P^{(3)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - 3\varpi)$$
$$+ P^{(4)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi' - 2\Pi)$$
$$+ P^{(5)}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon - \varpi - 2\Pi);$$

expression qui en faisant

$$A = P^{(0)}\cos(\varpi + 2\varpi') + P^{(1)}\cos(2\varpi + \varpi') + P^{(2)}\cos 3\varpi' + P^{(3)}\cos 3\varpi$$
$$+ P^{(4)}\cos(\varpi' + 2\Pi) + P^{(5)}\cos(\varpi + 2\Pi);$$

et en nommant B ce que devient cette expression quand on y change les cosinus en sinus, pourra prendre cette forme :

$$\frac{a'd'.\delta R}{ndt} = A\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - B\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 3\epsilon).$$

Pour réduire cette expression en nombres, on formera d'abord les valeurs des quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, et de leurs différences tant par rapport à a que par rapport à a', au moyen des formules du n° 6, dans lesquelles on fera $i = 3$. Quant aux quantités F, G, H, etc., elles seront données par les approximations dépendantes de la première puissance des masses.

61. Considérons réciproquement les termes de δR dépendans de l'angle $5n't - 2nt$, qui résultent de la partie de R relative à l'argument $2n't - nt$ combinée avec les parties de δr, δv, etc., relatives à l'argument $3n't - nt$. Cette partie de R est de l'ordre des excentricités ; on peut donc supposer

$$R = M^{(0)}e\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + M^{(1)}e'\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi'),$$

ce qui donne

$$\delta R = (\delta v - \delta v').[2M^{(0)}e\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + M^{(1)}e'\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')]$$
$$+ \frac{\delta r}{a}.\left[a\frac{dM^{(0)}}{da}e\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da}e'\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')\right]$$
$$+ \frac{\delta r}{a'}.\left[a'\frac{dM^{(0)}}{da'}e\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + a'\frac{dM^{(1)}}{da'}e'\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')\right].$$

Si l'on différentie cette valeur en faisant varier nt, δv et δr et en regardant $n't$, $\delta v'$, $\delta r'$ et comme constans, on aura

$$\frac{d'.\delta R}{ndt} = (\delta v' - \delta v).[2M^{(0)}e\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + M^{(1)}e'\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')]$$
$$+ \frac{d.\delta v}{ndt}.[2M^{(0)}e\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + M^{(1)}e'\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')]$$
$$+ \frac{\delta r}{a}.\left[a\frac{dM^{(0)}}{da}e\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da}e'\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')\right]$$
$$+ \frac{\delta r'}{a'}.\left[a'\frac{dM^{(0)}}{da'}e\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + a'\frac{dM^{(1)}}{da'}e'\sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')\right]$$
$$+ \frac{d.\delta r}{andt}.\left[a\frac{dM^{(0)}}{da}e\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) + a\frac{dM^{(1)}}{da}e'\cos(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi')\right].$$

Il faut, dans cette expression, substituer pour δv, δr, $\delta v'$ et $\delta r'$, les parties de ces valeurs qui dépendent de l'argument $3n't - nt$ et des secondes puissances des excentricités et des inclinaisons; en n'ayant égard qu'à ces termes, soit

$$\frac{\delta r}{a} = F\cos(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + f), \quad \delta v = G\sin(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + g),$$
$$\frac{\delta r'}{a'} = F'\cos(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + f'), \quad \delta v' = G'\sin(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + g');$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta r}{andt} = -\frac{3n' - n}{n}.F\sin(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + f),$$
$$\frac{d.\delta v}{ndt} = \frac{3n' - n}{n}.G\cos(3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + g).$$

En faisant pour abréger

$$Q^{(0)} = eG'a'M^{(0)},\quad Q^{(1)} = \frac{1}{2}e'G'a'M^{(1)},\quad Q^{(2)} = \frac{3n'-2n}{n}.eGa'M^{(0)},$$

$$Q^{(3)} = \frac{3n'-2n}{2n}.e'Ga'M^{(1)},\quad Q^{(4)} = \frac{1}{2}eF'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'},\quad Q^{(5)} = \frac{1}{2}e'F'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'},$$

$$Q^{(6)} = -\frac{3n'-2n}{2n}eFaa'\frac{dM^{(0)}}{da},\quad Q^{(7)} = -\frac{3n'-2n}{2n}.e'Faa'\frac{dM^{(1)}}{da},$$

l'expression précédente de $\frac{d'.\delta R}{ndt}$ deviendra

$$\begin{aligned}\frac{a'd'.\delta R}{ndt} = {} & Q^{(0)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + g') \\ & + Q^{(1)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + g') \\ & + Q^{(2)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + g) \\ & + Q^{(3)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + g) \\ & + Q^{(4)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + f') \\ & + Q^{(5)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + f') \\ & + Q^{(6)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi + f) \\ & + Q^{(7)}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon - \varpi' + f),\end{aligned}$$

ou bien en faisant

$$\begin{aligned}A_{,} = {} & Q^{(0)}\cos(\varpi' - g') + Q^{(1)}\cos(\varpi' - g') + Q^{(2)}\cos(\varpi - g) + Q^{(3)}\cos(\varpi' - g) \\ & + Q^{(4)}\cos(\varpi - f') + Q^{(5)}\cos(\varpi' - f') + Q^{(6)}\cos(\varpi - f) + Q^{(7)}\cos(\varpi' - f),\end{aligned}$$

et nommant $B_{,}$ ce que devient cette expression quand on y change les cosinus en sinus

$$\frac{a'd'.\delta r}{ndt} = A_{,}\sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - B_{,}\cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon),$$

Les valeurs des quantités $M^{(0)}$ et $M^{(1)}$ et de leurs différences, se détermineront au moyen des formules du n° 81, livre II, dans lesquelles on fera $i = 2$, les valeurs des quantités désignées par F, G, F', G' dépendront de la première approximation.

62. Proposons-nous de déterminer les inégalités du moyen mouvement de Saturne, correspondantes aux

deux inégalités du moyen mouvement de Jupiter dont nous venons de nous occuper, c'est-à-dire la partie de la grande inégalité de Saturne du second ordre par rapport aux forces perturbatrices, et qui résulte de la double combinaison des argumens $5n't-2nt$ et $2n't-nt$. Si l'on désigne par $P'^{(0)}$, $P'^{(1)}$, etc., ce que deviennent $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, etc., relativement à cette dernière planète, on aura

$$P'^{(0)}=ee'^2\left[-\frac{5n'-n}{2n'}H'a'M^{(2)}+\frac{3}{2}Ha'M^{(2)}-\frac{(5n'-n)}{n'}K'a'M^{(1)}+3Ka'M^{(1)}\right.$$
$$\left.-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}-\frac{3}{2}Faa'\frac{dM^{(2)}}{da}-\frac{5n'-n}{2n'}G'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{3}{2}Gaa'\frac{dM^{(1)}}{da}\right],$$
$$P'^{(1)}=e^2e'\left[-\frac{(5n'-n)}{n'}H'a'M^{(1)}+3Ha'M^{(1)}-\frac{3}{2}\frac{(5n'-n)}{n'}K'a'M^{(0)}+\frac{9}{2}Ka'M^{(0)}\right.$$
$$\left.-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'}-\frac{3}{2}Faa'\frac{dM^{(1)}}{da}-\frac{5n'-n}{2n'}G'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}-\frac{3}{2}Gaa'\frac{dM^{(0)}}{da}\right],$$
$$P'^{(2)}=e'^3\left[-\frac{5n'-n}{2n'}K'a'M^{(2)}+\frac{3}{2}Ka'M^{(2)}-\frac{5n'-n}{2n'}G'a'^2\frac{dM^{(2)}}{da'}-\frac{3}{2}Gaa'\frac{dM^{(2)}}{da}\right],$$
$$P'^{(3)}=e^3\left[-\frac{3}{2}\frac{(5n'-n)}{n'}H'a'M^{(0)}+\frac{9}{2}Ha'M^{(0)}-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'}-\frac{3}{2}Faa'\frac{dM^{(0)}}{da}\right],$$
$$P'^{(4)}=e'\lambda^2\left[-\frac{3}{2}\frac{(5n'-n)}{n'}K'a'M^{(3)}+\frac{3}{2}Ka'M^{(3)}-\frac{5n'-n}{2n'}G'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}-\frac{3}{2}Gaa'\frac{dM^{(3)}}{da}\right],$$
$$P'^{(5)}=e\lambda^2\left[-\frac{3}{2}\frac{(5n'-n)}{n'}H'a'M^{(3)}+\frac{3}{2}Ha'M^{(3)}-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(3)}}{da'}-\frac{3}{2}Faa'\frac{dM^{(3)}}{da}\right].$$

De même en nommant $Q'^{(0)}$, $Q'^{(1)}$, etc., ce que deviennent $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, etc., relativement à m', on trouvera

$$Q'^{(0)}=-\frac{(5n'-n)}{n'}G'a'M^{(0)},\quad Q'^{(1)}=-\frac{5n'-n}{2n'}G'a'M^{(1)},\quad Q'^{(2)}=2G'aM^{(0)},\quad Q'^{(3)}=Ga'M^{(1)},$$
$$Q'^{(4)}=-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(0)}}{da'},\quad Q'^{(5)}=-\frac{5n'-n}{2n'}F'a'^2\frac{dM^{(1)}}{da'},$$
$$Q'^{(6)}=-Faa'\frac{dM^{(0)}}{da},\qquad Q'^{(7)}=-Faa'\frac{dM^{(1)}}{da};$$

Et en nommant ensuite $A'_{,}$ et $B'_{,}$ ce que deviennent A, B, $A_{,}$, $B_{,}$, relativement à m', on aura

$$\frac{a'd''.\delta R'}{n'dt} = (A'+A'_{,})\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-(B'+B'_{,})\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).$$

Remarquons maintenant que par la nature de la fonction perturbatrice, les valeurs des quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., relatives à l'action de m' sur m, sont égales à celles des quantités correspondantes $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., relatives à l'action de m' sur m, multipliées par $\frac{m'}{m}$, autant que l'on fait abstraction des termes qui renferment la quantité $A^{(1)}$, parce qu'elles se rapportent alors au développement de la partie commune aux deux fonctions R et R'. Quant à celles de ces quantités qui renferment $A^{(1)}$, dans le cas de mouvement de m troublé par m', il faut supposer (n° 24) $a'A^{(1)} = b_{\frac{1}{2}}^{(i)} - \alpha$, et dans le cas de m' troublé par m, il faut faire $a'A^{(1)} = b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \frac{1}{\alpha^2}$; en faisant donc simplement dans les deux cas $a'A_{\frac{1}{2}}^{(1)} = b_{\frac{1}{2}}^{(1)} - \alpha$, les valeurs de $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., lorsqu'on considérera les perturbations de m, seront aux valeurs des mêmes quantités relatives aux perturbations de m' dans le rapport de m à m'. Cela posé, si l'on compare respectivement entre elles les valeurs des quantités $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, etc., et $P'^{(0)}$, $P'^{(1)}$, $P'^{(2)}$, etc., en observant que $5n'-2n$ étant une très petite quantité, on peut, dans ces valeurs, supposer sans erreur sensible $5n'=2n$, on aura $mnP^{(0)}+m'n'P'^{(0)}=0$, $mnP^{(1)}+m'n'P'^{(1)}=0$, etc., les quantités $Q^{(0)}$, $Q^{(1)}$, etc., $Q'^{(0)}$, $Q'^{(1)}$, etc., seront liées entre elles par des équations semblables, en sorte que relativement à cette partie de $\delta R'$, on aura

$$\frac{d''.\delta R'}{mdt} = -\frac{d'.\delta R}{m'dt}.$$

Soit maintenant $\delta R''$ l'augmentation de la fonction δR lorsqu'on fait croître la valeur précédente de $a'A^{(1)}$ de $\alpha - \frac{1}{\alpha^2}$, on aura évidemment

$$\frac{m'}{m}\,\delta R' = -\delta R - \delta R'';$$

et en ne considérant que la seconde partie de la valeur de $\delta R'$, on trouvera encore $\frac{d''.\delta R'}{mdt} = -\frac{d'.\delta R''}{m'dt}$; on aura donc généralement

$$\frac{d''.\delta R'}{mdt} = -\frac{d'.\delta R}{m'dt} - \frac{d'.\delta R''}{m'dt}.$$

Et cette relation fort simple donnera très aisément la valeur de $\frac{d''.\delta R'}{dt}$ lorsque celle de $\frac{d'.\delta R}{dt}$ sera déterminée, on n'aura à calculer que la valeur de $\delta R''$, qui sera toujours très peu compliquée. Si les quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., qui dépendent du développement de la fonction R ne renfermaient pas la quantité $A^{(1)}$, on aurait simplement

$$\frac{d''.\delta R'}{mdt} = -\frac{d'.\delta R}{m'dt}.$$

Dans ce cas les inégalités correspondantes des moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne sont liées entre elles par la même relation que les inégalités correspondantes dépendantes de la première puissance des masses; c'est-à-dire qu'en n'ayant égard qu'à ces parties des valeurs de $\delta\zeta$ et de ζ', on a

$$\delta\zeta' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta\zeta.$$

En effet, ces inégalités sont alors déterminées par les équations

$$\delta\zeta = -3an\int dt\int d'.\delta R,$$

$$\delta\zeta' = +\frac{3a'n'm}{m'}\int dt\int d'.\delta R,$$

d'où résulte la relation précédente.

Dans le cas général on aura

$$\delta\zeta' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\delta\zeta + y.$$

On y représente une quantité peu considérable déterminée par l'équation $y = \frac{3a'n'm}{m'}\int dt\int d'.\delta R''$. Les mêmes relations existeront entre les inégalités qui résultent des diverses combinaisons énumérées n° 57, et en général entre les parties correspondantes des inégalités à longue période de deux planètes m et m' troublées par leur action mutuelle, qui dépendent du carré des forces perturbatrices; cela tient évidemment à la forme des différens termes des expressions de $d'\delta R$ et $d''\delta R'$.

63. Au reste, il existe généralement entre les valeurs complètes des deux quantités $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ une équation de condition que l'on peut démontrer *à priori*, et qui n'est qu'une extension aux inégalités du second ordre de l'équation qui lie entre elles les inégalités, dépendantes de la première puissance de la force perturbatrice, des moyens mouvemens de deux planètes m et m' qui réagissent l'une sur l'autre, équation que nous avons démontrée n° 39.

Cette relation devient ici d'autant plus importante, que les calculs qu'elle doit servir à vérifier sont plus longs et plus compliqués.

Reprenons l'équation (14) du n° 39.

$$\left.\begin{aligned}(M+m')m\,d'R+(M+m)m'\,d''R'=(M+m')mm'\left(d'\Delta-\frac{x'dx+y'dy+z'dz}{r'^3}\right)\\+(M+m)mm'\left(d''\Delta-\frac{xdx'+ydy'+zdz'}{r^3}\right),\end{aligned}\right\}(t)$$

Les caractéristiques d' et d'' désignant respectivement des différentielles prises par rapport aux coordonnées de m et de m', et en supposant pour abréger

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

Pour déterminer le mouvement autour de M de la planète m troublée par l'action de m', on a par le n° 8 du second livre,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(M+m)x}{r^3}+\frac{m'x'}{r'^3}-m'\frac{d\Delta}{dx}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{(M+m)y}{r^3}+\frac{m'y'}{r'^3}-m'\frac{d\Delta}{dy}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{(M+m)z}{r^3}+\frac{m'z'}{r'^3}-m'\frac{d\Delta}{dz}=0.$$

Le mouvement de m' troublé par l'action de m sera déterminé par les mêmes équations, dans lesquelles on changera ce qui est relatif à m en ce qui est relatif à m', et réciproquement.

Si l'on tire de ces équations les valeurs des six quantités $\frac{(M+m)x}{r^3}$, $\frac{(M+m)x'}{r'^3}$, etc., qu'on les subs-

titue dans l'équation (t), qu'on intègre ensuite l'équation résultante, en observant que

$$xdx+ydy+zdz=rdr,\quad x'dx'+y'dy'+z'dz'=r'dr',$$

et que par la nature de la fonction Δ on a

$$\frac{d\Delta}{dx}dx'+\frac{d\Delta}{dy}dy'+\frac{d\Delta}{dz}dz'-\frac{d\Delta}{dx}dx-\frac{d\Delta}{dy}dy-\frac{d\Delta}{dz}dz=-d\Delta,$$

$$\frac{d\Delta}{dx'}dx+\frac{d\Delta}{dy'}dy+\frac{d\Delta}{dz'}dz-\frac{d\Delta}{dx'}dx'-\frac{d\Delta}{dy'}dy'-\frac{d\Delta}{dz'}dz'=-d\Delta;$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}(M+m')m\int d'R+(M+m)m'\int d''R'=\text{const.}+mm'\left(\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}\right)\\ -mm'\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2}-(M+m+m').mm'\Delta.\end{array}\right\}\ (P)$$

Nous ne considérerons dans les deux membres de cette équation que les termes qui dépendent de l'argument $5n't-2nt$, et qui ayant pour diviseur $5n'-2n$, sont du troisième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons, ces termes, en effet, étant les seuls de cet ordre qui puissent acquérir par une seconde intégration la quantité $(5n'-2n)^2$ pour diviseur dans les valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$. Observons d'abord que les fonctions

$$-mm'\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2},$$

et $$-\frac{(M+m+m')mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

ne renferment aucun terme de cette espèce lorsqu'on y substitue pour x, y, etc., leurs valeurs elliptiques, n° 60, livre II.

Si l'on considère donc simplement les termes de l'ordre m^4 dans l'équation (P), on aura

$$m\int d'\text{R} + m'\int d''\text{R}' = 0 \quad (p).$$

C'est l'équation à laquelle nous sommes parvenus n° 39, et qui nous a donné la relation très simple qui existe entre les inégalités de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$, dépendantes de la première puissance des forces perturbatrices.

Considérons maintenant les termes du troisième ordre par rapport aux masses dans le second membre de l'équation (P). la fonction $mm'\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}\right)$ étant déjà du troisième ordre, il suffit d'y substituer pour r et r' leurs valeurs elliptiques; elle ne peut donc donner aucun terme du genre de ceux que nous considérons. Quant à la fonction

$$-mm'\delta.\left(\frac{dxdx'+dydy'+dzdz'}{dt^2}\right).$$

Il est facile de s'assurer qu'elle n'en donnera pas non plus de semblables. En effet, soit $\text{A}\cos(i'n't+int+\text{B})$ l'un quelconque des termes dans lesquels se développera le produit $dxdx'$, par exemple, lorsqu'on y substituera pour x et x' leurs valeurs elliptiques, i et i' pouvant avoir toutes les valeurs possibles, la valeur zéro exceptée, et A étant une fonction des élémens des orbites de m et de m'. Si l'on augmente ces élémens de leurs variations dues à l'action réciproque de m et de m', et qu'on observe que les seuls termes de ces variations qui aient $5n'-2n$ pour di-

seur sont ceux qui dépendent de l'argument $5n't-2nt$, on verra que la variation de A $\cos(i'n't+int+B)$ne saurait être aucun terme de ce genre relatif au même argument, c'est-à-dire aucun terme qui puisse par une nouvelle intégration acquérir le très petit diviseur $(5n'-2n)^2$.

Quant au dernier terme de l'équation (P), on peut le réduire au suivant :

$$-Mmm'\Delta.$$

Puisque la partie de ce terme qui est du troisième ordre ne peut donner aucun terme ayant pour argument $5n't-2nt$ et pour diviseur $5n'-2n$.

Il faut, dans le terme précédent, substituer à la place de ρ, sa valeur dépendante des forces perturbatrices. Or, si l'on regarde Δ comme une fonction des six variables r, v, s, r', v', s', ou des coordonnées polaires des planètes m et m', en remplaçant ces coordonnées par leurs valeurs, augmentées des parties dues aux forces perturbatrices, on aura

$$\delta\Delta=\frac{d\Delta}{dr}\delta r+\frac{d\Delta}{dv}\delta v+\frac{d\Delta}{ds}\delta s+\frac{d\Delta}{dr'}\delta r'+\frac{d\Delta}{dv'}\delta v'+\frac{d\Delta}{ds'}\delta s'.$$

D'après cette expression, il est évident que les seuls termes de $\delta\Delta$ dépendans de l'argument $5n't-2nt$ qui puissent avoir $5n'-2n$ pour diviseur, sont ceux qui résultent de la substitution des valeurs de δr, δv, etc., qui ont déjà pour argument $5n't-2nt$; combinés avec la partie non périodique de Δ. En faisant donc pour le moment abstraction de ces termes, on peut regarder comme nul le second

membre de l'équation (P), et en désignant par δR et $\delta R'$ les fonctions de R et de R' qui dépendent du carré des forces perturbatrices, cette équation, en supposant $M = 1$, donnera

$$m\int d'.\delta R + m'\int d''.\delta R' + mm'(\int d'R + \int d''R') = 0 \quad (q).$$

Si l'on ne considère, au contraire, dans l'équation (P) que les parties qui sont dues à la combinaison des argumens zéro et $5n't - 2nt$, on aura

$$m\int d'.\delta R + m'\int d''.\delta R' = -mm'\delta'\Delta.$$

Or, la valeur de R donne

$$m'\Delta = -R + m'\left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right).$$

Nous ne considérons dans $\delta\Delta$ que les termes qui résultent de la combinaison de la partie non périodique de Δ avec ceux de δr, δv, δs, etc., qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$; or, la dernière partie de l'équation précédente ne fournit pas de termes semblables, n° 60, livre II. On aura donc simplement, dans ce cas, $m'\Delta = -R$, et par conséquent

$$m'\delta\Delta = -\delta R.$$

L'équation (P), en n'ayant égard qu'à ces termes, donnera donc

$$m\int d'.\delta R + m'\int d''.\delta R' - m\delta R = 0.$$

En vertu de l'équation (p) on peut donner à l'équation (q) cette forme :

$$m\int d'.\delta R + m'\int d''.\delta R' + m'(m - m')\int d''R' = 0. \quad (r)$$

Si l'on considère uniquement les parties de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui sont indépendantes de la partie constante de la fonction R, en vertu des formules (o), on aura simplement

$$\delta\zeta = -3an\int dt\int d'.\delta R,$$
$$\delta\zeta' = -3a'n'\int dt\int d''.\delta R'.$$

On a, de plus, par la formule (8), livre II,

$$\zeta' = -3a'n'\int dt\int d''R'.$$

L'équation (r), en la multipliant par dt et en l'intégrant ensuite, en vertu de ces valeurs donnera

$$m'\delta\zeta' + \frac{a'n'}{an}m\delta\zeta + (m - m')m'\zeta' = 0.$$

D'ailleurs, aux quantités près de l'ordre m, on a $n^2a^3 = n'^2a'^3$, ce qui donne $\frac{a'n'}{an} = \sqrt{\frac{a}{a'}}$; l'équation précédente deviendra donc

$$m\sqrt{a}.\delta\zeta + m'\sqrt{a'}.\delta\zeta' + (m - m')m'\sqrt{a'}\zeta' = 0, \quad \text{(M)}$$

équation de condition à laquelle devront satisfaire les parties de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ qui dépendent du carré des forces perturbatrices, et qui résultent de toutes les combinaisons qu'on peut faire des différens argumens de chacun des facteurs de la fonction δR, et qui ont été énumérées n° 57, la combinaison des argumens $5n't - 2nt$ et zéro étant seule exceptée. Quant aux parties qui dépendent de cette combinaison, en les désignant par $\delta_{,}\zeta$ et $\delta_{,}\zeta'$, on aura entre elles l'équation de condition

$$m\sqrt{a}\,.\,\delta_{,}\zeta + m'\sqrt{a'}\,.\,\delta_{,}\zeta' - 3m\int \delta R dt = 0. \quad (N)$$

Les équations (M) et (N) serviront à déterminer la valeur de $\delta\zeta$ lorsque celle de $\delta\zeta'$ sera connue, et réciproquement, ou bien elles serviront à vérifier ces valeurs, si elles ont été calculées séparément.

Il faut toutefois remarquer que s'il arrivait, comme cela a lieu en effet, qu'une partie des valeurs de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ fût liée par l'équation de condition

$$m\sqrt{a}\,.\,\delta\zeta + m'\sqrt{a'}\,.\,\delta\zeta' = 0, \quad (L)$$

toutes les inégalités qui satisferaient à cette équation n'ajouteraient rien aux équations (M) et (N), en sorte qu'on pourrait en faire abstraction sans nuire à leur exactitude. D'ailleurs, le dernier terme de l'équation (M) étant une très petite quantité, d'après ce que nous avons dit n° 62, chaque couple d'inégalités correspondantes de $\delta\zeta$ et de $\delta\zeta'$ satisfera toujours en général, à très peu près, à l'équation (L). Il ne suffit donc pas que les valeurs que l'on a trouvées pour $\delta\zeta$ et $\delta\zeta'$ vérifient l'équation (M), pour qu'on puisse en conclure que ces valeurs sont les expressions complètes de ces quantités; il faut qu'on se soit, de plus, assuré, par le calcul direct, que l'on n'a omis aucune des parties de ces inégalités qui peuvent acquérir une valeur sensible.

64. Déterminons maintenant les inégalités de la longitude de l'époque correspondante aux précédentes. Ces inégalités devront être ajoutées à celles

du moyen mouvement dans l'expression des longitudes moyennes.

Reprenons la formule (2) du n° 46, qui détermine la variation de ε. Cette formule, en intégrant et en négligeant les cubes des excentricités, donnera

$$\left.\begin{array}{l}\delta\varepsilon = -2a^2\int ndt.\left(\frac{d.\delta R}{da}\right) + 2a^2\int ndt.\left(\frac{dR}{da}\int d'R\right) + \frac{a}{2}\int ndt.\left(e\frac{d.\delta R}{de}\right) \\ \quad + \frac{1}{2}\int ndt\left(a\delta e - \frac{1}{2}\,e\delta a\right)\frac{dR}{de}.\end{array}\right\} \quad (2)$$

En changeant dans cette expression tout ce qui est relatif à m en ce qui se rapporte à m', R en R', on aura l'expression de $\delta\varepsilon'$.

Examinons successivement les différens termes de cette formule. Le premier ne peut donner dans $\delta\varepsilon$ de termes divisés par $(5n'-2n)^2$ qu'autant qu'on considérera dans δR les termes qui ont déjà pour diviseurs $5n'-2n$; si l'on se borne donc à ces termes, la valeur de δR rapportée n° 58, donnera simplement

$$\delta R = \frac{m'}{2}\,\frac{dA^{(0)}}{da}\,\delta r + \frac{m'}{2}\,\frac{dA^{(0)}}{da'}\,\delta r'.$$

δr et $\delta r'$ désignant les variations des rayons elliptiques des deux planètes dépendantes de l'argument $5n't - 2nt$, et $\frac{m'}{2}\,A^{(0)}$ étant la partie non périodique du développement de R. Nous réduisons, comme on voit, cette partie à son premier terme; elle renferme, de plus, des termes dépendans des carrés des excentricités et des inclinaisons; mais ces termes ne donneraient que des quantités de l'ordre de celles que nous négligeons, puisque δr et $\delta r'$ sont déjà de l'ordre

des cubes de ces mêmes élémens; on peut donc ne pas y avoir égard.

Cette valeur différentiée par rapport à a, en regardant comme constantes les variations δr et $\delta r'$, donnera

$$\frac{d.\delta R}{da} = \frac{m'}{2} \cdot \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2} \cdot \delta r + \frac{m'}{2} \cdot \frac{d^2 A^{(0)}}{da\,da'} \delta r'.$$

Supposons aux valeurs de δr et de $\delta r'$ cette forme :

$$\frac{\delta r}{a^2} = 2f\,[\mathrm{P}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + \mathrm{P}'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)],$$

$$\frac{\delta r'}{a'^2} = -2f'[\mathrm{P}\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + \mathrm{P}'\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)],$$

on aura

$$\frac{d.\delta R}{m'da} = a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2} f\,[\mathrm{P}\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)+\mathrm{P}'\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)],$$
$$- a'^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da\,da'} f'[\mathrm{P}\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)+\mathrm{P}'\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)].$$

Nous avons trouvé, n° 38,

$$af = -\frac{2m'na}{5n'-2n}, \quad a'f' = -\frac{5mn'a'}{5n'-2n}.$$

On aura donc, en ne considérant que le premier terme de la formule (2)

$$\delta\epsilon = \frac{4m'^2n^2a^2}{(5n'-2n)^2} \cdot a'a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2} \cdot [a'\mathrm{P}'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) - a'\mathrm{P}\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)]$$
$$- \frac{10mm'nn'}{(5n'-2n)^2} \cdot a'a^2 \frac{d^2 A}{da\,da'} \cdot [a'\mathrm{P}'\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon) - a'\mathrm{P}\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)].$$

Considérons le second terme de la même formule. Les seuls termes divisés par $(5n'-2n)^2$ qui puissent en résulter dans $\delta\epsilon$, sont ceux qui dans la valeur de $\int d'R$ ont déjà $5n'-2n$ pour diviseur.

Si l'on suppose donc

$$R = m'P \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + m'P' \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon);$$

d'où l'on tire

$$\int d'R = -\frac{2m'n}{5n' - 2n}.[P \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) + P' \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)].$$

Il faudra combiner dans $\delta\epsilon$ la valeur précédente de $\int d'R$ avec celle de $\frac{dR}{da}$ qui résulte de la partie non périodique de R ; c'est-à-dire qu'en ne considérant que le second terme de la formule (2) on aura

$$\delta\epsilon = \frac{2m'^2 n^2 a^2}{(5n' - 2n)^2} a' a \frac{dA^{(0)}}{da}.[a'P' \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) - a'P \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)].$$

Si l'on ajoute cette partie de la valeur de $\delta\epsilon$ à la précédente, en observant que

$$a'a^2 \frac{d^2A^{(0)}}{da\,da'} = -2a^2 \frac{dA^{(0)}}{da} - a^3 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2},$$

on trouvera, en vertu des deux premiers termes de la formule (2),

$$\begin{aligned}\delta\epsilon = {} & \frac{2m'^2 n^2 a^2}{(5n' - 2n)^2}.\left(aa' \frac{dA^{(0)}}{da} + 2a'a^2 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\left\{\begin{array}{l} a'P' \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\ -a'P \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \end{array}\right\} \\ & + \frac{10mm'nn'a}{(5n' - 2n)^2}.\left(2aa' \frac{dA^{(0)}}{da} + a'a^2 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\left\{\begin{array}{l} a'P' \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\ -a'P \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \end{array}\right\},\end{aligned}$$

et par une analyse semblable pour la partie correspondante de $\delta\epsilon'$, on aura

$$\begin{aligned}\delta\epsilon' = {} & -\frac{5m^2 n'^2}{(5n' - 2n)^2}\left(a'^2 \frac{dA^{(0)}}{da'} + 2a'^3 \frac{d^2A^{(0)}}{da'^2}\right)\left\{\begin{array}{l} a'P' \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\ -a'P \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \end{array}\right\} \\ & - \frac{4mm'nn'a}{(5n' - 2n)^2}\left(2aa' \frac{dA^{(0)}}{da} + a'a^2 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\left\{\begin{array}{l} a'P' \sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \\ -a'P \cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon) \end{array}\right\}.\end{aligned}$$

Le troisième terme de l'expression (2) ne peut donner aucun terme de l'espèce de ceux que nous

considérons lorsqu'on néglige les quantités dépendantes des puissances des excentricités supérieures à la troisième. En effet, pour avoir ces termes, il suffit de supposer

$$\delta R = \frac{m'}{2}\frac{dA^{(0)}}{da}\delta r + \frac{m'}{2}\frac{dA^{(0)}}{da'}\delta r'.$$

Cette expression, différentiée par rapport à e, sans faire varier δr et $\delta r'$, se réduit à zéro.

Passons au calcul du dernier terme de la valeur de $\delta\varepsilon$. En n'ayant égard qu'à ce terme, on aura

$$\delta\varepsilon = -\frac{1}{2}\int ndt\left(e\delta a - \frac{1}{2}a\delta e\right)\frac{dR}{de}.$$

Il est clair que les seuls termes qui puissent avoir $(5n'-2n)^2$ pour diviseur sont ceux de δa et de δe qui dépendent de l'argument $5n't-2nt$, combinés avec les termes non périodiques de $e\frac{dR}{de}$ et de $\frac{dR}{de}$. Or, $e\frac{dR}{de}$ est une fonction du second ordre par rapport aux excentricités, et les termes de δa dont il s'agit sont déjà du troisième ordre; il ne résulterait donc de cette combinaison que des termes du cinquième ordre relativement aux excentricités, quantités que nous négligeons. Tenons-nous-en donc à considérer les termes de $\delta\varepsilon$ qui naissent de la substitution de la valeur de δe. On a pour la variation de l'excentricité, n° 42, livre II,

$$de = -\frac{1}{2}aed'R - andt\frac{dR}{ed\varpi}.$$

La première partie de cette expression ne peut don-

ner dans $\delta\varepsilon$ aucun terme du genre de ceux dont il s'agit, par la même raison que précédemment; il suffira donc de considérer la seconde. En n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent de l'argument $5n't - 2nt$, on a, n° 36,

$$\delta e = \frac{m'an}{5n'-2n}\left[\frac{dP}{de}\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)+\frac{dP'}{de}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right].$$

On aura donc par la substitution de cette valeur

$$\delta\varepsilon = \frac{m'a^2n^2}{4(5n'-2n)^2}a'\frac{dF}{de}\left[a'\frac{dP'}{de}\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-a'\frac{dP}{de}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right],$$

et en changeant tout ce qui est relatif à m' en ce qui est relatif à m, et réciproquement, on aura pour la partie correspondante de $\delta\varepsilon'$,

$$\delta\varepsilon' = \frac{m^2a'^4n'^2}{2(5n'-2n)^2}\cdot\frac{dF'}{de'}\cdot\left[\frac{dP'}{de'}\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)-\frac{dP}{de'}\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\right].$$

F et F' désignant respectivement les parties constantes du développement de R et R'. Si l'on n'a égard qu'aux termes dépendans des carrés des excentricités et des inclinaisons, on a

$$F = \frac{m'}{2}A^{(0)} + \frac{m'}{8}H(e^2+e'^2) + \frac{m'}{2}ee'H'\cos(\varpi'-\varpi) - \frac{m'}{8}aa'B^{(1)}\gamma^2,$$

où l'on fait pour abréger

$$H = 2a\frac{dA^{(0)}}{da} + a^2\frac{d^2A^{(0)}}{da^2},$$

$$H' = A^{(1)} - a\frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{1}{2}a^2\frac{d^2A^{(1)}}{da^2},$$

et en multipliant par $\frac{m}{m'}$ l'expression de F, on aura l'expression de F'.

64. Il est aisé de s'assurer que les variations des excentricités et des longitudes des périhélies ne contiennent aucune inégalité de l'espèce de celles que nous venons de considérer ici, c'est-à-dire aucun terme dépendant de l'argument de la grande inégalité du second ordre par rapport à la force perturbatrice, et qui ait pour diviseur la très petite quantité $(5n'-2n)^2$, du moins tant qu'on n'a égard qu'aux termes dépendans des troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons; il n'en saurait donc résulter dans les expressions des longitudes vraies de m et de m' que des inégalités insensibles. En réunissant par conséquent les diverses inégalités des moyens mouvemens de m et de m' qui résultent des combinaisons énumérées n° 57, et celles des longitudes des époques que nous venons de déterminer, et en désignant par $\delta\zeta$, $\delta\zeta'$, $\delta\varepsilon$, et $\delta\varepsilon'$ ces sommes, pour déterminer les inégalités correspondantes du mouvement en longitude de m et de m', on aura

$$\delta v = \delta\zeta + \delta\varepsilon, \quad \delta v' = \delta\zeta' + \delta\varepsilon'.$$

Ces équations donneront les parties les plus sensibles des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne dépendantes du carré des forces perturbatrices.

65. Nous n'avons considéré jusqu'ici parmi les termes de cet ordre que ceux qui sont relatifs à l'argument de la grande inégalité; mais on peut tenir compte des principales inégalités de Jupiter et de Saturne, dépendantes de la seconde puissance de la

force perturbatrice, et relatives à un argument quelconque de la manière suivante.

Soit $H\cos(i'n't - int + A)$ un terme du développement de R, et soit $K\sin(i'nt' - int + B)$ l'inégalité qui en résulte dans le mouvement de m. L'expression de K, d'après ce que nous avons dit n° 28, aura pour diviseur l'une des trois quantités $(i'n' - in)^2$, $(i'n' - in)$ ou $(i'n' - in) \pm n$. Maintenant, si l'on veut avoir égard aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice, il faudra, à la place de $n't$ et de nt, substituer $\int nd't$ et $\int ndt$, et faire croître dans H et A les élémens de l'orbite elliptique de leurs variations. Mais on a $\int n'dt = n't + \zeta'$ et $\int ndt = nt + \zeta$; il faudra donc dans le terme $H\cos(i'n't - int + A)$ augmenter les longitudes $n't$ et nt de ζ et de ζ', et en n'ayant égard dans les valeurs de ces quantités qu'aux termes relatifs à la grande inégalité : il en résultera dans R un terme du second ordre de la forme $kH\cos[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + A + C]$, et l'inégalité correspondante de m aura pour diviseur $[i'n' - in \pm (5n' - 2n)]^2$, $i'n' - in \pm (5n' - 2n)$, $i'n' - in \pm (5n' - 2n) \pm n$. Si $i'n' - in$ ou $i'n' - in \pm n$ ne sont pas de très petites quantités de l'ordre $5n' - 2n$, on peut, dans ces diviseurs, négliger $5n' - 2n$ devant $i'n' - in$ et $i'n' - in \pm n$; en sorte que l'inégalité correspondante à

$$kH\cos[i'n' - int \pm (5n't - 2nt) + A + C]$$

sera

$$kK\sin[i'n't - int \pm (5n't - 2nt) + B + C],$$

quantité qui est l'expression de la variation de $K \sin (i'n' - int + B)$ lorsqu'on augmente $n't'$ et nt de leurs grandes inégalités. Ainsi donc, dans les inégalités de Jupiter et de Saturne, qui ne dépendent pas de l'argument $5n't - 2nt$, ou dans lesquels le coefficient de t ne diffère pas de la quantité $5n' - 2n$ du coefficient n pour Jupiter, ou du coefficient n' pour Saturne, on aura égard aux termes du second ordre, en augmentant $n't$ et nt de leurs grandes inégalités dépendantes de l'angle $5n't - 2nt$.

Quant aux inégalités résultantes des variations relatives à l'angle $5n't - 2nt$ des autres élémens de l'orbite elliptique, comme ces variations sont toujours très peu considérables par rapport à celles du moyen mouvement, on pourra les regarder comme tout-à-fait insensibles.

66. Lorsqu'on aura déterminé toutes les inégalités du mouvement d'une planète, dépendantes d'un même argument, on en fera la somme, et on les réunira ensuite en un seul terme, comme on l'a dit n° 30. Soit

$$K \sin (i'n't - int + i'\epsilon' - i\epsilon + A)$$

l'inégalité qu'on obtiendra de cette manière; K et A étant des fonctions des élémens des orbites, leurs variations séculaires peuvent avoir de l'influence sur les valeurs de ces quantités. Si l'on juge l'inégalité assez considérable pour y avoir égard, on pourra le faire par la méthode du n° 29. On calculera la même inégalité pour une époque éloignée de deux cents ans de la première, soient A' et B' ce que deviennent

alors A et B; on aura

$$\frac{dK}{dt}=\frac{K'-K}{200},\quad \frac{dA}{dt}=\frac{A'-A}{200}.$$

On aura donc pour un temps t quelconque compté en années juliennes, à partir de l'époque qu'on a choisie,

$$\left(K+t\frac{dK}{dt}\right)\sin\left(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon+A+t\frac{dA}{dt}\right);$$

et, sous cette forme, cette valeur pourra s'étendre à plusieurs siècles, sans erreur sensible.

La détermination des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne exige qu'on ait égard aux termes dépendans du carré du temps dans la partie qui a pour diviseur $(5n'-2n)^2$, et qui est, par cette raison, très considérable. En ne considérant que ces termes, on a, n° 41,

$$\delta v=\frac{6m'n^2a}{(5n'-2n)^2}\left\{\begin{array}{l}\left[P'+\frac{2dP}{(5n'-2n)dt}-\frac{3d^2P'}{(5n'-2n)^2dt^2}\right]\sin(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon)\\ -\left[P-\frac{2dP'}{(5n'-2n)dt}-\frac{3d^2P}{(5n'-2n)^2dt^2}\right]\cos(5n't-2nt+5\varepsilon'-2\varepsilon).\end{array}\right\}$$

Les valeurs de P, P' et de leurs différences se rapportent à un instant quelconque. Si, pour fixer les idées, on prend pour époque l'année 1800; que pour abréger on fasse

$$Q=P-\frac{2dP'}{(5n'-2n)dt}-\frac{3d^2P}{(5n'-2n)^2dt^2},$$

$$Q'=P'+\frac{2dP}{(5n'-2n)dt}-\frac{3d^2P'}{(5n'-2n)^2dt^2},$$

P, P' et leurs différences se rapportant ici à l'époque

de 1800, on aura pour un temps quelconque t, en négligeant les puissances de t supérieures à la seconde,

$$\delta v = \frac{6m'n^2a}{(5n'-2n)^2}\left\{\begin{array}{l}\left(Q'+t\frac{dQ'}{dt}+\frac{t^2}{2}\frac{d^2Q'}{dt^2}\right)\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon)\\ -\left(Q+t\frac{dQ}{dt}+\frac{t^2}{2}\frac{d^2Q}{dt^2}\right)\cos(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon).\end{array}\right\}$$

Les valeurs de Q, Q′ et de leurs différences s'obtiendront sans peine lorsque celles des quantités P et P′ et de leurs différences seront connues; on pourra, dans ces valeurs, n'avoir égard qu'aux premières et secondes différences de P et de P′, et ces quantités se détermineront comme on l'a vu n° 29.

Si l'on veut réduire à un seul terme l'inégalité précédente, on la calculera pour les trois époques de 1800, 2300 et 2800, éloignées de 500 ans l'une de l'autre. Soit $L\sin(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon+\mathcal{C})$ cette inégalité réduite à un seul terme pour 1800, et soient L', $\mathcal{C}'$, L'', $\mathcal{C}''$, ce que deviennent L et $\mathcal{C}$ aux époques de 2300 et de 2800, c'est-à-dire lorsqu'on fait respectivement $t=500$ et $t=1000$ dans la valeur de δv, on aura pour un temps quelconque t, compté de 1800,

$$\delta v=\left(L+t\frac{dL}{dt}+\frac{t^2}{2}\frac{d^2L}{dt^2}\right)\sin\left(5n't-2nt+5\epsilon'-2\epsilon+\mathcal{C}+t\frac{d\mathcal{C}}{dt}+\frac{t^2}{2}\frac{d^2\mathcal{C}}{dt^2}\right),$$

les différences de L et $\mathcal{C}$ se rapportant à l'époque de 1800, et étant déterminées par la méthode du n° 29. On aura ainsi

$$\frac{dL}{dt}=\frac{4L'-3L-L''}{1000},\qquad \frac{d^2L}{dt^2}=\frac{L''-2L'+L}{250000},$$
$$\frac{d\mathcal{C}}{dt}=\frac{4\mathcal{C}'-3\mathcal{C}-\mathcal{C}''}{1000},\qquad \frac{d^2\mathcal{C}}{dt^2}=\frac{\mathcal{C}''-2\mathcal{C}'+\mathcal{C}}{250000};$$

on donnera de même à la grande inégalité de m' la forme

$$(A + Bt + Ct^2)\sin(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon)$$
$$+ (A' + B't + C't^2)\cos(5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon),$$

et l'on réduira ensuite en un seul terme cette inégalité par les mêmes procédés.

Lorsque toutes les inégalités du mouvement d'une planète seront ainsi ramenées à la même forme, il sera facile de les réduire en tables qui s'étendront à plusieurs siècles avant et après l'époque qu'on aura choisie. D'ailleurs, comme nous l'avons dit, il ne sera nécessaire d'avoir égard aux variations dépendantes de la première puissance du temps dans l'expression des coefficiens, que pour celles de ces inégalités qui seraient considérables, et l'on n'aura égard au carré du temps que dans le calcul des parties des deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne ayant $(5n' - 2n)^2$ pour diviseurs et relatives à la troisième puissance des excentricités et des inclinaisons.

CHAPITRE V.

Des perturbations dans les mouvemens des planètes et des comètes, dues à la résistance d'un milieu très rare.

67. La résistance qu'un corps en mouvement peut éprouver par la réaction du fluide qu'il traverse, dépend en général de la densité du fluide et de la vitesse dont le mobile est animé.

On suppose ordinairement la résistance proportionnelle au carré de la vitesse; et l'accord de cette hypothèse avec un grand nombre de phénomènes observés à la surface de la Terre semble indiquer que c'est en effet la loi de la nature. Quant à la loi de densité du fluide éthéré qui entoure le Soleil, elle est absolument inconnue, puisque l'existence même de ce fluide est encore très problématique. Cependant on doit supposer, en général, que cette densité diminue à mesure qu'on s'éloigne du Soleil, et qu'elle devient nulle à des distances infinies. On pourra donc regarder la densité du milieu comme une fonction inconnue de la distance au centre du Soleil, et faire ensuite sur la forme de cette fonction différentes hy-

pothèses, parmi lesquelles on choisira celle qui s'accorde le mieux avec l'observation.

Soit donc ds l'élément de la courbe décrite par la planète m, dans l'instant dt, et $\rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ l'expression de la résistance du fluide qu'elle traverse. ρ, qui représente la loi de la densité du milieu, étant une fonction quelconque de la distance de la planète au centre du Soleil, en sorte qu'on a généralement $\rho = K\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ en nommant r le rayon vecteur de la planète et k un coefficient constant. Cette résistance s'exerce évidemment en sens opposé au mouvement de la planète; en multipliant donc son expression par les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ que forme l'élément ds avec les axes coordonnés, on aura pour les trois composantes respectivement parallèles à ces axes

$$-\rho\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\quad -\rho\frac{ds}{dt}\,\frac{dy}{dt},\quad -\rho\frac{ds}{dt}\,\frac{dz}{dt}.$$

Pour déterminer les perturbations que ces forces introduisent dans le mouvement de la planète, on regardera son orbite comme une ellipse variable, dont on déterminera les élémens par la méthode ordinaire. Nous pourrions déduire les variations de ces élémens, des formules que nous avons données n° 31, livre III, et qui s'appliquent immédiatement au cas où la résistance de l'éther est la force perturbatrice qui agit sur la planète; mais nous profiterons de cette occasion pour montrer comment, par la simple combinaison des formules du mouve-

ment elliptique, on peut obtenir très aisément les expressions des élémens de l'orbite troublée sous telle forme qu'il conviendra de leur donner.

68. Si l'on désigne comme précédemment par R la fonction perturbatrice, et qu'on néglige la masse de la planète devant celle du Soleil prise pour unité, ce qui donne $\mu = 1$, les équations différentielles du mouvement troublé donneront d'abord les quatre intégrales suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} = 2\int d'\mathrm{R}, \\
&\frac{xdy-ydx}{dt} = \int\left(y\frac{d\mathrm{R}}{dx} - x\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)dt, \\
&\frac{zdx-xdz}{dt} = \int\left(x\frac{d\mathrm{R}}{dz} - z\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right)dt, \\
&\frac{ydz-zdy}{dt} = \int\left(z\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)dt.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dans le cas de l'orbite elliptique, R est nul, et les seconds membres des équations précédentes se réduisent à des constantes, on a donc

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} = 0, \\
&\frac{xdy-ydx}{dt} = c, \quad \frac{zdx-xdz}{dt} = c', \quad \frac{ydz-zdy}{dt} = c''.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les trois quantités $\frac{1}{2}cdt$, $\frac{1}{2}c'dt$, $\frac{1}{2}c''dt$, représentent les aires décrites par le rayon vecteur de m, pendant l'instant dt sur chacun des plans de projection, et la racine de la somme de leurs carrés l'aire décrite sur le plan même de l'orbite; cette aire est égale d'ailleurs à $\frac{1}{2}\sqrt{a(1-e^2)}\,dt$, n° 20, livre II, en sorte

qu'on aura

$$a(1-e^2)=c^2+c'^2+c''^2.$$

Si l'on prend pour plan de projection le plan de l'orbite primitive de la planète, c' et c'' seront de l'ordre des forces perturbatrices ; en négligeant donc le carré de ces forces, on aura $\sqrt{a(1-e^2)}=c$. Quant aux quantités c' et c'', elles déterminent la position du plan de l'orbite ; et en nommant φ son inclinaison sur le plan fixe, et θ la longitude de son nœud, on a, n° 30, livre III.

$$c'=\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\theta,\ c''=-\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\theta.$$

En faisant donc, comme dans le n° 4, livre II, $\sin\varphi\sin\theta=p$, $\sin\varphi\cos\theta=q$, on aura

$$p=\frac{c''}{\sqrt{a(1-e^2)}},\qquad q=\frac{-c'}{\sqrt{a(1-e^2)}}.$$

Cela posé, si l'on différentie, conformément à la théorie des variations des constantes, les équations (2), en faisant varier à la fois les constantes et les variables qu'elles renferment, et qu'on compare ensuite ces différentielles à celles des équations (1), on aura, pour déterminer les quatre constantes a, e, p, q que nous avons substituées aux constantes a, c, c', c'', les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} d.\frac{1}{a} &= -2d'R, \\ d.\sqrt{a(1-e^2)} &= dt.\left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right), \\ dp &= \frac{dt}{\sqrt{a(1-e^2)}}.y\left(\frac{dR}{dz}\right), \\ dq &= \frac{dt}{\sqrt{a(1-e^2)}}.x\left(\frac{dR}{dz}\right), \end{aligned}\right\}(3)$$

équations auxquelles nous étions déjà parvenus, n° 30, livre III.

On déterminera donc immédiatement ainsi les quatre principaux élémens de l'orbite troublée; les deux autres peuvent s'en déduire avec la même facilité. En effet, par les formules du mouvement elliptique, on a

$$r = a(1 - e\cos u),$$
$$nt + \varepsilon - \varpi = e - e\sin u,$$
$$\tang \tfrac{1}{2}(v - \varpi) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang \tfrac{1}{2}u.$$

Ces équations, ainsi que leurs différences premières, doivent également convenir à l'ellipse invariable et à l'orbite troublée, ce qui exige que leurs différentielles, prises relativement aux constantes qu'elles renferment et aux quantités qui varient avec elles, soient nulles d'elles-mêmes. On aura ainsi, n° 31, livre III,

$$da(1 - e\cos u) - ade\cos u + aedu\sin u = 0,$$
$$d\varepsilon - d\varpi + de\sin u - du(1 - e\cos u) = 0,$$
$$d\varpi\sqrt{1-e^2}(1 - e\cos u) + de\sin u + du(1 - e^2) = 0.$$

18..

Ces trois équations suffisent pour déterminer $d\epsilon$ et $d\varpi$, en fonction de de et de da. Si l'on substitue dans les deux dernières la valeur de du tirée de la première, on aura les deux suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} ae\sqrt{1-e^2}\,d\varpi\sin u + ade(e+\cos u) - da(1-e^2) = 0, \\ (d\epsilon - d\varpi)ae\sin u + ade(e-\cos u) + da(1-e\cos u)^2 = 0; \end{array}\right\} (4)$$

ou bien en ajoutant ces deux équations :

$$d\epsilon - d\varpi\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) = \frac{d.a(1-e^2) - da(1-e\cos u)^2}{ae\sin u}.$$

Cette dernière équation peut prendre, comme on sait, une forme très simple. En effet, on a

$$d.a(1-e^2) = 2\sqrt{a(1-e^2)}.d.\sqrt{a(1-e^2)},$$

et en substituant pour da et $d.\sqrt{a(1-e^2)}$ leurs valeurs, en observant qu'on a

$$\sqrt{a} = a^2 n,\quad d'R = \frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy,\ \text{et}\ x\frac{dR}{dx} + y\frac{dR}{dy} = r\frac{dR}{dr},$$

et faisant attention aux valeurs de dx et dy données, n° 51, livre III, on aura

$$d\epsilon = d\varpi\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) - 2andt\left(r\frac{dR}{dr}\right), \quad (5)$$

équation à laquelle nous sommes déjà parvenus, n° cité.

En substituant dans la première des équations (4) pour da et de leurs valeurs, on aura la valeur de $d\varpi$, et l'équation précédente donnera celle de $d\epsilon$ quand la valeur de $d\varpi$ sera déterminée.

On aura donc ainsi les différentielles de tous les élémens de l'orbite exprimées au moyen des différences partielles de la fonction perturbatrice relatives aux coordonnées de la planète troublée. On peut donner à ces formules différentes formes, selon les cas où l'on se propose de les employer. Si au lieu des coordonnées rectangulaires on veut faire usage des coordonnées polaires r, v, s, on observera qu'en regardant R comme fonction de ces quantités, on a

$$d'R = \frac{dR}{dr}\,dr + \frac{dR}{dv}\,dv + \frac{dR}{ds}\,ds.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède

$$d'R = \frac{dR}{dx}\,dx + \frac{dR}{dy}\,dy + \frac{dR}{dz}\,dz;$$

en négligeant les quantités qui sont de l'ordre du carré des forces perturbatrices, on a d'ailleurs

$$x = r\cos(v - \omega), \quad y = r\sin(v - \omega), \quad z = rs.$$

En comparant donc ces deux expressions de $d'R$ après avoir substitué pour dx, dy, et dz leurs valeurs, on trouvera, aux quantités près que nous négligeons,

$$x\,\frac{dR}{dx} + y\,\frac{dR}{dy} = r\,\frac{dR}{dr},$$

$$x\,\frac{dR}{dy} - y\,\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dv},$$

$$\frac{dR}{dz} = \frac{1}{r}\,\frac{dR}{ds}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (3), (4) et (5), et en exprimant les sinus et cosinus de l'ano-

malie excentrique u en fonction du sinus et du cosinus de l'anomalie vraie $v-\varpi$, on aura les variations de tous les élémens de l'orbite exprimés par des formules qui ne contiendront que les différences partielles de la fonction R relatives aux coordonnées polaires de m multipliées par des fonctions de ces coordonnées.

Enfin, si l'on observe que l'on a, n° 4,

$$\frac{dR}{dv}=\frac{dR}{ndt}+\frac{dR}{d\varpi},$$

$$r\frac{dR}{dr}=a\frac{dR}{da},$$

$$\sin(v-\omega)\frac{dR}{ds}=\frac{dR}{dq};\ \cos(v-\omega)\frac{dR}{ds}=-\frac{dR}{dp},$$

en substituant ces valeurs dans les formules précédentes, les variations de tous les élémens se trouveront exprimées par des formules qui ne contiendront que les différences partielles de la fonction perturbatrice relatives aux élémens de l'orbite elliptique, multipliées par des fonctions de ces élémens indépendantes du temps, conformément au théorème démontré généralement dans le n° 17, du livre II. Nous avons vu les avantages de cette manière d'exprimer les variations des élémens de l'orbite elliptique dans la théorie des inégalités planétaires.

69. Revenons maintenant à la question qui nous occupe ici, et déterminons par les formules précédentes les altérations de l'orbite de m dues à la résistance du milieu que cette planète est obligée de traverser. Nous avons représenté par $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$, les forces

qui sollicitent m dans le sens de ses coordonnées rectangulaires, on aura donc dans ce cas, n° 67,

$$\frac{dR}{dx} = -\rho\frac{dsdx}{dt^2},\ \frac{dR}{dy} = -\rho\frac{dsdy}{dt^2},\ \frac{dR}{dz} = -\rho\frac{dsdz}{dt^2}.$$

On voit que z étant de l'ordre des forces perturbatrices $\frac{dR}{dz}$ est une quantité de l'ordre du carré de ces forces, on peut donc supposer $\frac{dR}{dz} = 0$, ce qui donne $p =$ constant, $q =$ constant; c'est-à-dire que l'action du milieu résistant n'influe pas sur la position de l'orbite de m, ce qui devait naturellement résulter en effet de la supposition que nous avons faite, que la résistance du milieu était une force qui s'exerçait tangentiellement à chacun des élémens de la courbe décrite par le mobile.

En observant que l'on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$
$$xdy - ydx = r^2dv = dt\sqrt{a(1-e^2)}.$$

Les valeurs précédentes donneront

$$dR = -\rho\frac{ds}{dt^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = -\rho\frac{ds^3}{dt^2},$$
$$x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx} = -\rho\frac{ds}{dt^2}(ydx - xdy) = -\rho\frac{r^2dsdv}{dt^2},$$
$$r\frac{dR}{dr} = x\frac{dR}{dx} + y\frac{dR}{dy} = -\rho\frac{ds}{dt^2}(xdx + ydy) = -\rho\frac{rdsdr}{dt^2}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (3) et (4), en observant que par les formules du mouvement elliptique on a

$$r^2 dv = a^2 n dt \sqrt{1-e^2},$$

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{1+e\cos u}{a(1-e\cos u)},$$

et $a^{\frac{3}{2}} n = 1$, on trouvera sans peine

$$da = -\ 2a\rho ds\left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right),$$

$$de = -\ 2\rho ds\left[\frac{(1-e^2)\cos u}{1-e\cos u}\right],$$

$$ed\omega = -\ 2\rho ds\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}\right),$$

$$d\epsilon - d\omega\left(1-\sqrt{1-e^2}\right) = 2\rho ds\, e\sin u.$$

On peut, dans ces formules, substituer à la place de ds sa valeur en u, en sorte qu'elles se trouveront toutes exprimées en fonction de l'anomalie excentrique. En effet, on a

$$ndt = du(1-e\cos u),$$

d'où, en observant que $\frac{1}{n\sqrt{a}} = a$, on conclura

$$ds = adu\sqrt{1-e^2\cos^2 u}.$$

On aura donc ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
da &= -\ 2a^2\rho du\sqrt{\frac{(1+e\cos u)^3}{1-e\cos u}},\\
de &= -\ 2a(1-e^2)\rho du\cos u\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}},\\
ed\omega &= -\ 2a\sqrt{1-e^2}\rho du\sin u\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}},\\
ed\epsilon &= 2a\rho du\left(1-\sqrt{1-e^2}-e^3\cos u\right)\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}
\end{aligned}\right\}(6)$$

En nommant $\zeta = \int ndt$ le moyen mouvement dans l'orbite elliptique, on a dans l'orbite troublée, n° 43, livre II,

$$d\zeta = -3andt \int d'R.$$

On aura donc, par ce qui précède,

$$d\zeta = 3adu(1 - e\cos u)\int \rho du \sqrt{\frac{(1 + e\cos u)^3}{1 - e\cos u}}. \quad (7)$$

70. Ces formules donneront les variations des élémens de l'orbite elliptique dues à la résistance du milieu que la planète est forcée de traverser. Pour les intégrer, il faudra supposer connue la loi de la densité du milieu, ou la valeur de ρ. On observera d'abord que la fonction ρ doit être supposée une très petite quantité, puisque les perturbations causées par la résistance du fluide éthéré sont elles-mêmes très peu considérables, ce qui permet de négliger son carré et de regarder a et e comme constantes dans le second membre des équations précédentes; on pourrait d'ailleurs, par des approximations successives, tenir compte ensuite des termes négligés.

La valeur de ρ, comme nous l'avons dit, sera en général une fonction donnée de la distance r de la planète au centre du Soleil; et en y substituant pour r sa valeur $a(1 - e\cos u)$, elle deviendra fonction de $\cos u$. Supposons qu'après avoir multiplié par $\sqrt{\frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}}$ cette fonction, on la réduise en série ordonnée par rapport aux cosinus de l'angle u et de ses multiples, et représentons cette série par

$$A + eB\cos u + e^2 C\cos 2u + \text{etc.},$$

A, B, C étant des fonctions qui ne renferment que des puissances paires de e, et devant être regardées d'ailleurs comme des quantités positives, lorsqu'on suppose que la densité décroît en raison inverse de la distance au Soleil. Si l'on substitue cette valeur dans les formules (6), et qu'ensuite on intègre, on en déduira très aisément les valeurs de chacun des élémens elliptiques de l'orbite exprimées en séries ordonnées par rapport aux puissances ascendantes de l'excentricité.

Si l'orbite s'écarte peu de la forme circulaire, en sorte que e soit une très petite fraction, en négligeant les termes dépendans du carré et des puissances supérieures de l'excentricité, on aura

$$\begin{aligned}
\delta a &= -2a^2[Au + e(A+B)\sin u],\\
\delta e &= -2a[A\sin u + \tfrac{1}{2}eB(u + \tfrac{1}{2}\sin u)],\\
\zeta &= \tfrac{3}{2}an(Au^2 - 2eB\cos u),\\
e\delta\omega &= 2a(A\cos u + \tfrac{1}{4}eB\cos 2u),\\
\delta\epsilon &= -a(A\cos u + \tfrac{1}{4}eB\cos 2u).
\end{aligned}$$

On voit par ces formules que la longitude du périhélie, ainsi que celle de l'époque, ne sont assujetties qu'à des variations dont la période n'excède pas la durée d'une révolution de la planète; il en serait de même relativement à l'inclinaison de l'orbite et à la longitude du nœud, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice; si l'on ne considère donc que les inégalités qu'un long inter-

valle peut rendre sensible, on aura

$$\delta a = -2a^2 Au,\ \delta e = -aeBu,\ \zeta = \tfrac{3}{2}anAu^2,$$
$$e\delta\varpi = 0,\ \delta\varepsilon = 0,\ \delta p = 0,\ \delta q = 0;$$

d'où l'on doit conclure que la résistance du milieu n'altérera à la longue ni la position du plan de l'orbite, ni celle de son périhélie; mais comme A et B sont, par hypothèse, des quantités positives, elle fera décroître indéfiniment, et par degrés insensibles, le grand axe et l'excentricité. L'orbite se rapprochera de plus en plus de la forme circulaire, et il en résultera une inégalité séculaire dans l'expression de la longitude moyenne, et par conséquent dans la durée de la révolution de la planète. En effet, $\int ndt + \varepsilon$ étant la longitude moyenne de la planète dans le vide, la variation du moyen mouvement $\int ndt$ introduira dans cette expression l'inégalité $\frac{3}{2}anAu^2$. Ainsi donc, en vertu de la résistance du milieu, le mouvement angulaire de la planète s'accélère de plus en plus, et par conséquent le temps périodique diminue à chaque révolution.

Si l'on considère les variations totales du grand axe et de l'excentricité pendant une révolution entière de la planète, on aura $\delta a = -4a^2 A\pi$, $\delta e = -2aeB\pi$; ainsi, par l'effet de la résistance du milieu, l'orbite se rapproche de plus en plus de la forme circulaire, tandis que la distance moyenne de la planète au Soleil diminuant continuellement, elle doit finir par atteindre la surface de cet astre.

Au reste, si les espaces célestes sont remplis par

un fluide très rare, aucune observation n'a indiqué jusqu'ici que ce fluide exerçât la plus légère influence sur le mouvement des planètes; mais il serait possible qu'il eût une action sensible sur les comètes, à cause du peu de densité de la matière qui les compose, comme nous l'avons dit n° 40, livre III.

71. Considérons donc maintenant le cas des orbites très excentriques comme celles des comètes. Si l'on n'a égard qu'aux inégalités séculaires que la résistance du milieu peut introduire dans le mouvement de la comète, on pourra ne s'occuper que des variations du grand axe, de l'excentricité et du moyen mouvement, puisque celles du périhélie et de la longitude de l'époque ne renferment aucune inégalité de cette espèce. Reprenons les deux premières formules (4) et la formule (7), que nous écrirons ainsi :

$$\delta a = -2a^2\int \rho du\left[\frac{2(1+e\cos u)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\right],$$

$$\delta e = -\frac{2a(1-e^2)}{e}\int \rho du\left[\frac{1+e\cos u}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\right],$$

$$\zeta = 3an\int dt\int \rho du\left[\frac{2(1+e\cos u)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}} - \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\right].$$

Supposons qu'en développant en série ordonnée par rapport aux cosinus de l'angle u et de ses multiples la fonction

$$\frac{\rho(1+e\cos u)}{\sqrt{1-e^2\cos^2 u}},$$

dans laquelle on substituera pour ρ sa valeur en fonction de u, on ait

$$A + A'\cos u + A''\cos 2u + \text{etc.},$$

et supposons que la fonction

$$\rho\sqrt{1 - e^2\cos^2 u},$$

développée de la même manière, donne la série suivante :

$$B + B'\cos u + B''\cos 2u + \text{etc};$$

en négligeant les quantités périodiques, on aura

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= -2a^2(2A - B)u, \\ \delta e &= -\frac{2a(1-e^2)}{e}(A - B)u, \\ \zeta &= \tfrac{3}{2}a(2A - B)u^2, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

et pour déterminer les coefficiens A et B, on aura, n° 18,

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\rho\, du(1 + e\cos u)}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}},$$

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \rho du\,\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}.$$

Ces deux intégrales définies peuvent, à l'aide de transformations très simples, se ramener à la forme d'intégrales elliptiques dans un cas très étendu, celui où l'on suppose la loi de la résistance exprimée par une série composée d'un nombre quelconque de termes, et ordonnée par rapport aux puissances descendantes du rayon vecteur r multipliées par des coefficiens constans.

Prenons d'abord pour exemple le cas le plus simple, celui où l'on suppose que la densité du milieu est la

même dans tous les points de l'orbite. On a généralement, n° 67, $\rho = K\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$, r étant le rayon vecteur de la comète, et $\varphi\left(\frac{1}{r}\right)$ une fonction de r qui devient égale à l'unité quand $r = 1$, enfin K une constante qui dépend de la densité du fluide à l'unité de distance, et de la masse de l'astre en mouvement. Dans le cas que nous examinons, on a donc $\rho = K$, et, en observant que l'intégrale $\int \frac{du \cos u}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}$ est nulle entre les limites $u = 0$ et $u = \pi$, on aura

$$A = \frac{K}{\pi} \int_0^\pi \frac{du}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}},$$

$$B = \frac{K}{\pi} \int_0^\pi du \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}.$$

Ces intégrales doivent s'étendre, comme les précédentes, depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \pi$; mais il est clair qu'on obtiendra également leurs valeurs en intégrant entre les limites $u = 0$ et $u = \frac{1}{2}\pi$, et en ayant soin de doubler les résultats. Les expressions de A et B représentent alors des fonctions elliptiques de première et de seconde espèce; et, d'après la notation adoptée, on aura, n° 22,

$$A = \frac{2K}{\pi} F(e),$$

$$B = \frac{2K}{\pi} E(e).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (8), et en les étendant à une révolution entière de la

comète, ce qui suppose $u = 2\pi$, en observant de plus qu'on a $\frac{\delta n}{n} = \frac{d.\delta\zeta}{du}$, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= -8a^2\mathrm{K}[2\,\mathrm{F}(e) - \mathrm{E}(e)], \\ \delta e &= -\frac{8a(1-e^2)\mathrm{K}}{e}[\mathrm{F}(e) - \mathrm{E}(e)], \\ \delta n &= 12an\mathrm{K}[2\mathrm{F}(e) - \mathrm{E}(e)]. \end{aligned}\right\} (9)$$

Considérons en second lieu le cas qui semble indiqué comme celui de la nature par l'analogie qu'il présente avec un grand nombre de phénomènes semblables qui se passent à la surface de la Terre, celui où la densité du milieu diminue en raison inverse du carré de la distance de l'astre au noyau que ce milieu recouvre. On aura alors $\rho = \frac{\mathrm{K}}{r^2}$ en désignant par K un coefficient constant, ou bien en mettant pour r sa valeur, on aura

$$\rho = \frac{\mathrm{K}}{a^2(1 - e\cos u)^2} = \frac{\mathrm{K}(1 + e\cos u)^2}{a^2(1 - e^2\cos^2 u)^2}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les expressions de A et B, que pour abréger on fasse $\sqrt{1 - e^2\cos^2 u} = \Delta$, ce qui donne $e^2\cos^2 u = 1 - \Delta^2$, et qu'on observe qu'on peut omettre sous le signe intégral les multiples impairs de $\cos u$, on trouvera

$$\mathrm{A} = -\frac{2\mathrm{K}}{a^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\Delta^3}\left(3 - \frac{4}{\Delta^2}\right),$$

$$\mathrm{B} = -\frac{2\mathrm{K}}{a^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\Delta}\left(1 - \frac{2}{\Delta^2}\right).$$

Or, par la théorie des fonctions elliptiques, on a (*),

$$\int\frac{du}{\Delta} = F(e)\,; \quad \int\frac{du}{\Delta^3} = \frac{1}{1-e^2}E(e),$$
$$\int\frac{du}{\Delta^5} = \frac{2E(e)}{3(1-e^2)}\left(\frac{2-e^2}{1-e^2}\right) - \frac{1}{3(1-e^2)}F(e).$$

on aura donc

$$A = \frac{2K}{a^2\pi}\left[-\frac{4}{3(1-e^2)}F(e) - \frac{3}{1-e^2}E(e) + \frac{8(2-e^2)}{3(1-e^2)^2}E(e)\right],$$
$$B = \frac{2K}{a^2\pi}\left[\frac{2}{1-e^2}E(e) - F(e)\right];$$

et en substituant ces valeurs dans les formules (8), on trouvera

$$\left.\begin{aligned}
\delta a &= -8K\left\{F(e)\left[1-\frac{8}{3(1-e^2)}\right] - \frac{8E(e)}{3(1-e^2)}\left(1-\frac{2}{1-e^2}\right)\right\},\\
\delta e &= -\frac{4(1-e^2)}{ae}K\left\{F(e)\left[2-\frac{8}{3(1-e^2)}\right] - \frac{8E(e)}{3(1-e^2)}\left(\frac{7}{4}-\frac{2}{1-e^2}\right)\right\},\\
\delta n &= +\frac{12nK}{a}\left\{F(e)\left[1-\frac{8}{3(1-e^2)}\right] - \frac{8E(e)}{3(1-e^2)}\left(1-\frac{2}{1-e^2}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}(10)$$

Ces deux exemples suffiront pour montrer comment, en étendant la même analyse au cas plus général où la loi de la résistance est exprimée par une formule de la forme

$$\rho = A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} \ldots + \frac{N}{r^m} + \text{etc.},$$

on ramenerait la détermination des variations des élémens de l'orbite de m au calcul des fonctions elliptiques.

(*) *Traité des Fonctions elliptiques,* tome Ier, page 256.

72. Nous avons dit que jusqu'à présent les observations n'avaient indiqué dans le mouvement des planètes ou des satellites aucune inégalité dépendante de la résistance du milieu qu'elles pourraient avoir à traverser; les formules du n° 70 peuvent donc être regardées comme des résultats analytiques qui sont restés jusqu'ici sans application dans la théorie du système du monde. Mais il n'en est pas de même relativement aux comètes : la matière éthérée, s'il en existe une autour du Soleil, pourrait avoir, comme nous l'avons vu, une influence sensible sur leurs mouvemens, à raison de leur peu de densité et de leur proximité du Soleil vers leur périhélie. En effet, on a remarqué dans les retours au périhélie de la comète à courte période de 1819, celle des comètes périodiques qui nous est le mieux connue en ce moment, quelques inégalités que le calcul de ses perturbations n'a pas suffi pour expliquer, et que l'on a cru devoir attribuer à l'effet de la résistance d'un milieu très rare. Quoique nous soyons loin d'admettre, du moins quant à présent, cette explication autrement que comme une hypothèse plausible, nous allons, pour montrer l'usage des formules précédentes, en faire l'application au mouvement de cette comète.

Selon M. Encke, les élémens de l'orbite, en 1832, étaient :

Passage au périhélie, mai 1832, 3^j,99093 (temps moy. à Paris.)	
Demi-grand axe	2.222240
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.	0.845433
Lieu du périhélie	157° 21′ 2″,4
Longitude du nœud ascendant	334.32. 5,2
Inclinaison	13.22.12,3
Mouvement moyen par jour	1071″,09598.

D'après ces données, en faisant $b = \sqrt{1 - e^2}$, on aura $b = 0,5340807$; et si l'on nomme θ l'angle qui aurait pour sinus l'excentricité e de l'orbite, en sorte qu'on ait $e = \sin\theta$, $b = \cos\theta$, on trouvera

$$\theta = 57° 43' 6'',3.$$

Cette valeur de θ, par les tables calculées par Legendre (*Traité des Fonctions elliptiques*, tome II), donnera

$$\log \mathrm{F}(e) = 0,3217456, \quad \mathrm{F}(e) = 2,09771,$$
$$\log \mathrm{E}(e) = 0,0908971, \quad \mathrm{E}(e) = 1,23299;$$

de là on tire

$$\mathrm{F}(e) - \mathrm{E}(e) = 0,86472,$$
$$2\mathrm{F}(e) - \mathrm{E}(e) = 2,96243.$$

Ces valeurs substituées dans les formules (9) donneront, pour le cas d'un milieu résistant, de densité constante,

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= -\ 117,03608\mathrm{K}, \\ \delta e &= -\ 5,18668\mathrm{K}, \\ \delta n &= \ 0,41023\mathrm{K}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Considérons maintenant le cas qui paraît plus vraisemblable, celui où l'on suppose que la densité varie en raison inverse du carré de la distance de l'astre au

Soleil. Au moyen des valeurs précédentes de $F(e)$ et de $E(e)$, on trouvera sans peine

$$\frac{8F(e)}{3b^2}=19{,}61103,\ \frac{8E(e)}{3b^2}=11{,}52530,\ \frac{16E(e)}{3b^4}=80{,}81060;$$

d'où l'on conclura

$$\left(1-\frac{8}{3b^2}\right)F(e)-\left(1-\frac{2}{b^2}\right)\frac{8E(e)}{3b^2}=51{,}77198,$$
$$\left(2-\frac{8}{3b^2}\right)F(e)-\left(\frac{7}{4}-\frac{2}{b^2}\right)\frac{8E(e)}{3b^2}=45{,}22572.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (10), on trouvera pour les variations du grand axe, de l'excentricité et du mouvement moyen résultant de l'action de l'éther, après une révolution de la comète, les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \delta a &= -\ 414{,}17580K, \\ \delta e &= -\ 27{,}46556K, \\ \delta n &= \quad 1{,}45174K. \end{aligned}\right\}\ (12)$$

En ajoutant les variations précédentes aux altérations que subissent les mêmes élémens par l'attraction des planètes près desquelles passe la comète pendant sa révolution de 1832 à 1835, et qu'on déterminera par les formules du n° 32, livre II, on aura les variations totales de ces élémens ; mais pour déterminer numériquement les valeurs de δa, δe et δn, il faudrait connaître encore la valeur du coefficient K qui dépend, comme on l'a vu n° 67, de la densité et de la forme de l'astre en mouvement, c'est-à-dire de la nature même de la comète, qui nous est absolument inconnue. Cependant on peut, sans nouvelle hypo-

thèse, comparer les formules précédentes aux observations, en n'employant que leurs rapports entre elles, ce qui fera disparaître le coefficient indéterminé K. Ainsi, par les formules (11), on aura pour le rapport de la variation du grand axe et de l'excentricité à celle du moyen mouvement,

$$\frac{\delta a}{\delta n} = - 285,29640,$$

$$\frac{\delta e}{\delta n} = - 12,64345;$$

et par les formules (12), on trouvera

$$\frac{\delta a}{\delta n} = - 285,29640,$$

$$\frac{\delta e}{\delta n} = - 18,91906.$$

On voit que, dans les deux cas, le rapport de la variation du demi-grand axe à celle du moyen mouvement est identique; ce qui résulte, en effet, des formules (9) et (10); tandis que les variations de l'excentricité et du moyen mouvement sont dans des rapports très différens; le premier est moindre que les deux tiers du second. Il suit de là que si l'on pouvait déterminer avec exactitude la partie de la variation de l'excentricité et du moyen mouvement, indépendante de l'action des planètes, en comparant leur rapport aux deux précédens, on aurait un moyen de reconnaître quelle est l'hypothèse la plus probable pour la loi de la résistance du milieu; mais les observations ne sont pas assez précises, les approximations du calcul des perturbations assez exactes, et les

quantités qu'il faut déterminer sont trop petites, pour qu'on puisse espérer d'y parvenir de cette manière.

M. Encke, qui s'est particulièrement occupé de cette comète, a essayé de déterminer directement, par la comparaison du calcul et des observations, la valeur du coefficient K. Il a suivi pour cela la méthode employée généralement par les astronomes, pour la correction des élémens qui entrent dans la construction des tables du mouvement des planètes. Il a choisi un certain nombre de lieux observés vers les passages au périhélie de 1819, 1822 et 1825; et comme les perturbations causées par l'action de Jupiter ont été très considérables pendant la période de 1819 à 1822, et que la valeur qu'on assigne à la masse de cette planète a dû avoir beaucoup d'influence sur leur détermination, pour tenir compte de cette circonstance, il a supposé aux élémens de l'orbite des corrections dépendantes à la fois d'un changement dans la masse de Jupiter et de l'hypothèse d'un milieu résistant, et il a déterminé ensuite avec ces élémens les mêmes lieux de la comète par le calcul. La différence des ascensions droites et des déclinaisons ainsi déterminées, aux mêmes quantités données par l'observation, lui a fait connaître l'erreur de ses suppositions. Il a formé ainsi autant d'équations qu'il y avait d'observations, et il les a combinées ensuite par la méthode qu'on doit à Legendre, de manière à déterminer les valeurs des inconnues, c'est-à-dire la correction de la masse de Jupiter et le coefficient K, qui rendent *minimum* la somme des carrés des erreurs.

M. Encke, à l'aide de la valeur de K ainsi obtenue, a calculé des éphémérides de la comète pour 1828 ; mais ces éphémérides, distribuées d'avance aux astronomes, représentèrent fort imparfaitement les observations de cette époque. Lorsque la comète fut de retour à son périhélie, M. Encke choisit cinq nouvelles observations faites vers ce passage, qu'il joignit à celles qu'il avait déjà employées, et en opérant sur leur ensemble comme précédemment, il détermina de nouvelles valeurs pour la correction de la masse de Jupiter et pour le coefficient K; mais ces deux quantités ainsi déterminées présentèrent, avec les précédentes, des différences tellement considérables, qu'il était impossible de les attribuer à quelques quantités négligées dans le calcul, ou à de simples imperfections dans les observations. Il paraissait alors naturel de s'en tenir aux résultats des derniers calculs, fondés sur l'ensemble de toutes les observations qu'on avait considérées, et qui devaient, par conséquent, donner plus de certitude que les premiers, appuyés seulement sur une partie d'entre elles. M. Encke a cru devoir en agir autrement; il a cherché quelle serait la correction de la masse de Jupiter nécessaire pour faire accorder les deux valeurs du coefficent K, et il a trouvé qu'il suffisait pour cela de supposer la masse de Jupiter égale à $\frac{1}{1054,4}$, au lieu de la supposer de $\frac{1}{1067,09}$, comme elle résulte des élongations des satellites observées par Halley. Ce résultat est d'autant plus remarquable, que cette valeur

de la masse de Jupiter s'accorde presque entièrement avec celle que Gauss a déduite des observations de Pallas, Nicolaï de celles de Junon, et enfin Encke et Heiligenstein de celles de Vesta et Cérès. Les deux séries d'observations choisies par M. Encke conduisent alors à la même valeur du coefficient K; en sorte qu'en adoptant la valeur $\frac{1}{1053,924}$ de la masse de Jupiter, qui est en effet celle qui semble s'accorder le mieux avec le calcul des perturbations des petites planètes, on aura

$$K = \frac{1}{890,852}.$$

Il faut encore observer qu'il résulte des deux équations de condition données par M. Encke, qu'il serait impossible de rejeter absolument l'hypothèse d'un milieu résistant, sans être obligé d'attribuer à la masse de Jupiter une valeur qui ne s'accorderait plus avec les autres phénomènes célestes, ou de supposer aux observations des erreurs qui dépasseraient les limites qu'on peut raisonnablement leur attribuer.

M. Encke a fait voir ensuite qu'en calculant dans l'hypothèse d'un milieu résistant, avec la valeur précédente, les élémens de l'orbite aux trois époques de 1786, de 1795 et de 1805, antérieures à celle de 1819, où le retour périodique de la comète fut enfin reconnu, on obtient des résultats assez concordans avec ces observations, pour qu'on puisse attribuer les différences soit aux erreurs dont elles sont susceptibles, soit aux inexactitudes des calculs, qui, de 1786

à 1819, comprennent un intervalle de dix révolutions. Si l'on se refusait, au contraire, à admettre l'existence d'un milieu résistant, on ne parviendrait à représenter les anciennes observations qu'avec des différences qui ne pourraient être moindres que 21′ en plus ou en moins, et qui pourraient s'élever, dans le cas le plus favorable, jusqu'à 169′, résultat inadmissible, quelle que soit l'incorrection que l'on suppose à ces observations. Il semblerait donc, d'après ces considérations, développées avec détail dans le mémoire de M. Encke, qu'on ne saurait plus douter que l'action d'un milieu résistant, ou de quelque autre cause qui produit absolument le même effet, n'influe sur la marche de la comète à courte période de 1819.

Cependant on ne doit pas perdre de vue qu'en admettant même l'existence d'un milieu éthéré, il resterait encore à décider si l'hypothèse d'une résistance réciproque au carré de la distance au Soleil, que M. Encke a adoptée dans ses calculs, est véritablement la loi de la nature, car tout autre hypothèse donnerait des résultats très différens. Quant à la circonstance qui a fait rencontrer à M. Encke, pour la correction de la masse de Jupiter, une valeur concordante avec la valeur de cette masse, déduite des perturbations des petites planètes, elle nous semble simplement l'effet d'un heureux hasard, puisque, de l'aveu même de cet astronome, les observations de 1819 et 1822 étaient peu propres à déterminer des quantités aussi petites que la correction de la masse de Jupiter, et le coefficient K, à cause des

perturbations considérables que la comète a subies durant cette période. Enfin, nous pensons que c'est au temps et à l'étude approfondie qu'on fera des perturbations de cette comète, lors de ses retours successifs, qu'il faut laisser à décider un point aussi important.

Quoi qu'il en soit, d'après la valeur du coefficient K donnée plus haut, on aura

$$\begin{aligned} \delta a &= -\ 0{,}46492\,, \\ \delta e &= -\ 0{,}030830\,, \\ \delta n &= \quad 336'',13080. \end{aligned}$$

Ces valeurs, jointes à celles qui proviennent de l'action des planètes, donneront les altérations totales des élémens du mouvement de la comète de 1832 à 1835, et permettront de déterminer, à l'avance, son orbite pour l'époque de son prochain retour.

73. Les formules précédentes s'appliqueraient encore, avec une légère modification, au cas où la force perturbatrice serait l'action de la lumière sur les planètes et les comètes, soit qu'on la regarde comme due aux vibrations d'un fluide élastique, soit que dans le système de l'émission on la considère comme une émanation du Soleil. En effet, en supposant le milieu que parcourt la lumière d'une égale densité, sa vitesse sera constante et elle se propagera en ligne droite. Cela posé, si l'on transporte en sens inverse à la lumière la vitesse qui anime la planète dans son orbite, on pourra imaginer ensuite que cet astre est en repos, et l'action réciproque du fluide lumineux et de la planète n'en sera pas altérée.

L'action de la lumière sera alors celle d'un fluide élastique doué d'une vitesse variable qui choque un corps en repos : elle communiquera au centre de gravité de la planète une force accélératrice qu'on pourra regarder comme la résultante de deux autres forces, l'une d'impulsion, qui s'exerce suivant le rayon vecteur de la planète, et qui est proportionnelle à la vitesse de la lumière; la seconde, de résistance, qui agit en sens inverse de la direction du mouvement de la planète et qui est proportionnelle à sa vitesse dans son orbite. Si l'on nomme donc ω la vitesse de la lumière, ces deux forces seront entre elles dans le rapport de ω à $\frac{ds}{dt}$, elles sont d'ailleurs proportionnelles à la densité de la lumière que nous supposerons réciproque au carré de la distance au Soleil, les deux forces dont il s'agit pourront donc être représentées par $\frac{h\omega}{r^2}$ et $\frac{h}{r^2}\frac{ds}{dt}$. La première de ces forces agit en sens contraire de la force attractive du Soleil; elle se confond avec elle en la diminuant légèrement. La seconde agit en sens contraire du mouvement de la planète, et son effet est celui d'une résistance proportionnelle à la vitesse de la planète et à la densité de la lumière. Si l'on fait donc

$$R = \frac{h}{r^2}\frac{ds}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{ds^2}{dt^2}\frac{dt}{ds}.$$

En supposant $\rho = \frac{h}{r^2}$ et en comparant cette valeur à celle de R, n° 69, on voit qu'il suffira de multiplier

par $\frac{dt}{ds}$ les résultats obtenus dans ce numéro pour les appliquer au cas actuel.

Les deux premières formules (a) donneront ainsi

$$da = -\ 2a\rho dt\left(\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}\right),$$
$$de = -\ 2\rho dt\left[\frac{(1-e^2)\cos u}{1-e\cos u}\right].$$

Les deux autres formules ne donneraient lieu qu'à des variations périodiques que nous négligeons.

En substituant donc pour dt sa valeur

$$dt = a^{\frac{3}{2}}(u - e\sin u),$$

on aura

$$da = -\ 2a^2nh\ \frac{du(1+e\cos u)}{(1-e\cos u)^2},$$
$$de = -\ 2anh\ \frac{du(1-e^2)\cos u}{(1-e\cos u)^2}.$$

Soit

$$(1 - e\cos u)^{-2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A} + e\mathrm{B}\cos u + e^2\mathrm{C}\cos 2u + \text{etc.},$$

en négligeant les quantités périodiques, les formules précédentes deviennent

$$da = -\ a^2nh\,(\mathrm{A} + e^2\mathrm{B})\,du,$$
$$de = -\ aneh\ (1 - e^2)\,\mathrm{B}\,du.$$

D'ailleurs, d'après la loi du développement de $(1 - e\cos u)^{-2}$ on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = 2(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}};$$

en substituant ces valeurs et en intégrant on aura donc

$$\delta a = -\frac{2\sqrt{a}h(1+e^2)u}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\delta e = -\frac{2heu}{\sqrt{a}(1-e^2)},$$

a et e dans ces formules pouvant être regardés comme des constantes, et étant les élémens de l'orbite à l'instant où l'on a $u=0$.

Quant à l'inégalité correspondante du mouvement moyen, on peut la déterminer au moyen de la formule (7), ou la déduire de l'expression précédente de δa; en effet on a $\frac{dn}{n} = -\frac{3}{2}\frac{da}{a}$, par conséquent $d\zeta = \delta n dt = -\frac{3n\delta a}{2a}dt$, en substituant donc pour δa sa valeur et en observant qu'on peut faire $u=nt$ quand on néglige les quantités périodiques, en intégrant on aura

$$\delta\zeta = \frac{3h(1+e^2)n^2t^2}{2\sqrt{a}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit par ces formules que l'impulsion de la lumière produit absolument le même effet sur le mouvement de la planète que la résistance d'un milieu très rare qu'elles auraient à traverser.

L'inégalité précédente doit être plus sensible sur le mouvement des comètes que sur celui des planètes, à cause de l'extrême petitesse que peut avoir alors le diviseur $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}$. Relativement aux planètes on peut négliger le carré de l'excentricité, et cette inégalité devient ainsi $\frac{3hn^2t^2}{2\sqrt{a}}$. Pour déterminer le coeffi-

cient h qui entre dans cette expression, nous supposerons, conformément aux lois de la résistance des fluides, l'impulsion de la lumière proportionnelle à sa densité, à la surface sur laquelle elle tombe, et au carré de la vitesse du fluide lumineux. En effet, soit ds l'espace que la lumière parcourt dans l'instant dt en vertu de sa vitesse ω : la masse de lumière qui tombe dans le même instant sur le grand cercle de la terre perpendiculaire à la direction des rayons lumineux sera ρds multiplié par la surface de ce grand cercle; et comme cette masse est animée de la vitesse ω, et que l'action que le fluide exerce est égale à sa masse multipliée par sa vitesse, l'impulsion de la lumière solaire sur la planète sera $\pi R^2 \rho \omega ds$, en nommant R le demi-diamètre de la planète; on a d'ailleurs $ds = \omega dt$, cette impulsion sera donc égale à

$$\pi R^2 \rho \omega^2 dt.$$

Cette quantité divisée par dt est la force motrice que l'action de la lumière communique à la planète; en la divisant donc par Pdt, P étant la masse de la planète, on aura la force qui en résulte sur son centre de gravité; cette force, par le numéro 73, est égale à $\frac{h\omega}{a^2}$, on aura donc

$$h = \frac{\pi a^2 R^2 \rho \omega}{P}.$$

L'inégalité séculaire $\frac{3hn^2t^2}{2\sqrt{a}}$ due à l'impulsion de la lumière solaire devient par la substitution de cette valeur, en observant que $a^3n^2 = 1$,

$$\frac{3\pi R^2 \rho \varpi n t^2}{2P}.$$

74. Dans le système de l'émission, la masse du Soleil doit diminuer sans cesse par la perte des rayons lumineux qui en émanent : il en résulte une nouvelle équation séculaire dans le mouvement des planètes et des comètes, que l'on peut aisément déterminer de la manière suivante. Soit 1 la masse du Soleil à l'instant que l'on choisit pour époque, et soit $1 - qt$, cette masse après le temps t, q étant un très petit coefficient constant. Quoique la masse solaire diminue sans cesse, sa force attractive est toujours dirigée vers son centre, d'après le principe des aires; la quantité $\sqrt{a\mu(1-e^2)}$, où μ exprime la somme des masses du Soleil et de la planète, doit par conséquent demeurer invariable; en nommant donc $a_{,}$ et $\mu_{,}$ ce que deviennent a et μ à l'origine du temps t, et négligeant le carré de l'excentricité, on aura $\sqrt{a\mu} = \sqrt{a_{,}\mu_{,}}$. Si l'on néglige la masse de la planète devant celle du Soleil, par ce qui précède on a $\mu_{,} = 1$, $\mu = 1 - qt$, on aura donc au bout du temps t,

$$a = \frac{a_{,}}{1 - qt},$$

et en vertu de l'équation $a^3 n^2 = \mu$, on en conclura

$$n = n_{,}(1 - qt)^2.$$

En négligeant donc le carré de q, on aura

$$\delta a = a_{,}qt, \quad \delta n = -2qn_{,}t.$$

L'équation $\delta\zeta = \int \delta n dt$ donnera donc pour l'iné-

galité séculaire due à la diminution de la masse solaire

$$\delta\zeta = - qn_{,}t^2.$$

Pour déterminer le coefficient q qui entre dans cette expression, observons que ω étant la vitesse de la lumière et ρ sa densité au point de l'espace qu'occupe la terre, la perte de lumière du Soleil dans l'instant dt sera $\omega\rho dt$, multiplié par la surface de la sphère dont le rayon est a; elle sera donc $4\pi a^2\omega\rho dt$, et comme nous avons représenté par qdt la diminution de la masse solaire pendant le même instant, on aura

$$q = 4\pi a^2\omega\rho.$$

L'inégalité séculaire due à la diminution de la masse du Soleil, sera donc

$$- 4\pi a^2 n\omega\rho t^2.$$

Cette équation est de signe contraire à celle que produit l'impulsion de la lumière, et elle est infiniment plus grande. En effet, en comparant ces deux équations on voit qu'elles sont entre elles dans le rapport de $-4a^2$ à $\frac{3R^2}{2P}$, ou de -1 à $\frac{3\left(\frac{R}{a}\right)^2}{8P}$. Cette dernière quantité est nécessairement une très petite fraction. Pour la Terre, par exemple, $\frac{R}{a}$ étant la parallaxe solaire, si l'on suppose cette parallaxe de 8″,58, et la masse de la Terre égale à $\frac{1}{356376}$, on trouve que le rapport précédent est celui de -1 à 0.00023124,

en sorte que l'inégalité séculaire de la Terre due à l'impulsion de la lumière est moindre que $\frac{1}{4324}$ de celle qui résulte de la diminution de la masse solaire.

En réunissant ces deux équations on aura

$$\delta\zeta = -4\pi a^2 \rho\varpi\left(1 - \frac{3}{8}\frac{R^2}{a^2 P}\right)t^2.$$

Cette formule donnera l'inégalité séculaire complète qui résulte de l'action de la lumière sur le mouvement de la Terre dans le système de l'émission.

L'impulsion de la lumière solaire est absolument insensible sur le mouvement de la Terre, et l'on démontre aisément qu'elle n'influe pas d'un quart de seconde sur l'équation séculaire de la Lune. Quant à l'équation due à la diminution de la masse solaire, Laplace conclut de son expression que depuis deux mille ans la masse du Soleil n'a pas éprouvé un deux-millionième d'altération, soit en plus, soit en moins. En effet, $-qnt^2$ étant l'équation séculaire de la Terre due à cette cause, si l'on désigne par l l'équation séculaire de la Terre, l étant un arc exprimé en degrés, on aura

$$qt = \frac{l}{nt},$$

qt est la diminution de la masse du Soleil, nt le nombre de degrés parcourus par la Terre dans le temps t. Si l'on suppose que t représente un nombre d'années sidérales, on aura $n = 360°$; en faisant donc $t = 2000$, on aura

$$qt = \frac{l}{720000}.$$

Da'près les observations, l ne dépasse pas à $0°,36$, ainsi qt est au-dessous de $\frac{1}{2000000}$.

75. Si l'on regarde la gravitation comme résultant de l'effet de l'impulsion d'un fluide vers le centre d'attraction, il résultera de la transmission successive de la force attractive une inégalité séculaire dans le mouvement des planètes et des comètes que l'on pourra encore déterminer par l'analyse précédente, relative à l'impulsion de la lumière solaire. En effet, d'après le n° 73, la force qui s'exerce suivant le rayon vecteur de la planète ou de la comète sera $\frac{h\omega}{a^2}$, ω représentant ici la vitesse du fluide gravitique; en nommant donc g la gravité, ce qui donne $g=\frac{h\omega}{a^2}$, l'équation séculaire $\frac{3hn^2t^2}{2\sqrt{a}}$ deviendra

$$\frac{3}{2}\,\frac{gnt^2}{\omega}.$$

Observons que dans le cercle, la force centrifuge est égale au carré de la vitesse divisée par le rayon. La vitesse moyenne de la planète étant an, si l'on néglige l'excentricité de l'orbite, la force centrifuge sera an^2; mais dans ce cas, la force centrifuge est égale et contraire à la force qui sollicite la planète vers le centre d'attraction, on a donc $g=an^2$, et l'équation séculaire précédente devient $\frac{3}{2}\,\frac{an^3t^2}{\omega}$, ω étant, comme on l'a dit, la vitesse du fluide au moyen duquel se transmet la gravitation.

Si l'on suppose que l'équation précédente se rapporte à la Terre, qu'on applique le même résultat à la Lune, en nommant $a_{,}$ sa distance moyenne à la Terre, et $n_{,}t$ son moyen mouvement sidéral, t exprimant un nombre d'années juliennes, son équation séculaire due à la transmission de la gravitation, sera

$$\frac{3}{2a}\left(\frac{a_{,}n_{,}^{3}}{an^{3}}\right)an^{3}t^{2}.$$

La fraction $\frac{a_{,}}{a}$ est égale à très peu près à $\frac{1}{400}$, et le rapport d $\frac{n}{n_{,}}$ est environ $\frac{1}{13}$, on a donc à très peu près

$$\frac{an^{3}}{a_{,}n_{,}^{3}}=\frac{1}{5,5}.$$

L'équation séculaire de la Terre, due à la transmission successive de la pesanteur, serait donc égale à un sixième environ de celle de la Lune due à la même cause, et comme celle-ci ne paraît point sensible, on peut regarder la première comme tout-à-fait inappréciable.

En comparant les deux équations séculaires de la Lune, l'une due à l'impulsion de la lumière solaire, l'autre à la transmission du fluide gravitique, on trouve qu'il faut supposer au fluide gravitique une vitesse au moins cent millions de fois plus grande que celle de la lumière; on peut donc supposer, comme on le fait ordinairement, cette vitesse infinie.

Quant à la nature même du pouvoir attractif de la matière, une question importante s'est agitée dans

ces derniers temps parmi les astronomes, à savoir, si le pouvoir attractif de la matière était identique pour tous les corps rapportés à l'unité de distance et à l'unité de masse, ou si la force de la gravitation variait comme les affinités chimiques, suivant la nature des différens corps qui agissent les uns sur les autres. On avait cru nécessaire d'admettre cette dernière supposition pour expliquer la différence qui existe entre les valeurs de la masse de Jupiter déduite des inégalités du mouvement de Saturne, et celle qui résulte des inégalités des petites planètes et des élongations de ses satellites d'après les nouvelles observations. Mais nous verrons qu'on peut rendre raison de cette différence sans être obligé d'admettre une hypothèse aussi contraire au principe fondamental de la loi de la gravitation telle qu'on l'a définie jusqu'ici, hypothèse démentie d'ailleurs par les phénomènes que la pesanteur terrestre développe continuellement sous nos yeux, par ceux qui résultent des inégalités du mouvement de la Lune, et par ceux enfin qui se rapportent aux oscillations de la mer ou de l'atmosphère. Tous ces phénomènes, en effet, concourent à nous montrer que le pouvoir attractif du Soleil, de la Terre et de la Lune, est le même sur l'air, l'eau et tous les corps solides; on est donc en droit d'étendre par induction la même loi à toutes les planètes, quelle que soit la nature des substances qui les composent, jusqu'à ce que des observations irréfragables aient prouvé qu'elle ne leur est pas applicable.

CHAPITRE VI.

Perturbations des mouvemens des planètes dues à la non-sphéricité du Soleil.

76. Dans la théorie des perturbations planétaires, nous avons regardé les corps célestes comme parfaitement sphériques; mais ils s'écartent tous plus ou moins de cette figure, en vertu de leur mouvement de rotation, qui a dû influer sur la disposition de leurs molécules supposées originairement fluides. Il en résulte dans les mouvemens des planètes autour du Soleil et dans les mouvemens des satellites autour de leurs planètes respectives des inégalités dépendantes de l'ellipticité du Soleil et de la non-sphéricité des planètes principales. Nous ne considérerons ici que les premières inégalités, les autres trouveront leur place lorsque nous nous occuperons de la théorie des satellites.

Si l'on nomme h l'ellipticité d'un sphéroïde dont la masse est M et qui diffère peu de la sphère, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à son équateur, θ la déclinaison de la planète m relative à ce plan, et r son rayon vecteur compté du centre

de gravité du sphéroïde, on aura, n° 36, livre IV,

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M}{r^3}\left(\frac{1}{2}q - h\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right).$$

En nommant V la fonction dont les différences partielles prises avec un signe contraire, ont la propriété de représenter les attractions qu'exerce le sphéroïde M sur la planète *m*.

Supposons que ce sphéroïde soit le Soleil. Le premier terme de l'expression précédente est celui qui se rapporte au mouvement elliptique et au cas où l'on regarde la masse du Soleil comme réunie à son centre de gravité. En faisant donc $M = 1$, et en observant que l'expression précédente de V suppose que l'on prend pour unité le rayon moyen du sphéroïde, on voit que l'ellipticité du Soleil ajoutera à l'expression de la fonction perturbatrice R, la quantité

$$\left(h - \frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right)\frac{D^2}{r^3},$$

h étant l'ellipticité du Soleil, D son demi-diamètre, *q* le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur solaire, et θ la déclinaison de la planète relative à cet équateur, en sorte que si l'on nomme γ l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur solaire, et ψ la longitude de leur commune intersection, qu'on désigne par v la longitude de la planète comptée sur le plan de son orbite, on aura

$$\cos\theta = \sin\gamma \sin(v - \psi);$$

et par conséquent

$$R = \left(h - \frac{1}{2}q\right)\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2\gamma[1 - 2\cos 2(v - \psi)]\right\}\frac{D^2}{r^3}.$$

Nous supposerons très petite l'inclinaison du plan de l'orbite de la planète à l'équateur solaire, ce qui permettra de négliger les quantités de l'ordre γ^2. En faisant de plus pour abréger

$$k = (h - \tfrac{1}{2}q)D^2,$$

on aura

$$R = \frac{1}{3}\,\frac{k}{r^3},$$

k désignant un coefficient constant dépendant de l'aplatissement du Soleil.

Les formules de la variation des élémens elliptiques, en négligeant l'excentricité de l'orbite, donnent

$$da = 2a^2 d'R, \quad d\zeta = -3andt\int d'R, \quad d\epsilon = -2a^2ndt\left(\frac{dR}{da}\right),$$

$$de = -\,andt\left(\frac{dR}{ed\omega}\right), \quad d\omega = andt\left(\frac{dR}{ede}\right).$$

En différentiant l'expression de R, on trouve

$$a\frac{dR}{da} = r\frac{dR}{dr} = -\frac{k}{r^3}, \quad \frac{dR}{de} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{de} = -\frac{k}{r^4}\frac{dr}{de},$$

$$\frac{dR}{d\omega} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{d\omega} = -\frac{k}{r^4}\frac{dr}{d\omega}.$$

Par les formules du mouvement elliptique on a

$$r = a[1 + \tfrac{1}{2}e^2 - e\cos(nt + \epsilon - \omega)],$$

d'où l'on tire

$$\frac{dr}{de} = a[e - \cos(nt + \varepsilon - \omega)],$$

$$\frac{dr}{d\omega} = - ae \sin(nt + \varepsilon - \omega),$$

et par conséquent

$$\frac{dR}{ed\omega} = \frac{k}{a^3} \sin(nt + \varepsilon - \omega),$$

$$\frac{dR}{de} = - \frac{k}{a^3}[e - \cos(nt + \varepsilon - \omega)][1 + 4e\cos(nt + \varepsilon - \omega)] = \frac{k}{a^3}[e + \cos(nt + \varepsilon - \omega)].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules précédentes, et qu'on les intègre ensuite, en nommant g la constante arbitraire jointe à l'intégrale $\int d'R$, on aura, aux quantités près que nous négligeons,

$$\delta a = 2ag^2, \quad \zeta = - 3agnt, \quad \delta\varepsilon = \frac{2k}{a^2} nt,$$

$$\delta e = \frac{k}{a^2}\cos(nt + \varepsilon - \omega), \quad \delta\omega = \frac{k}{a^2} nt + \frac{k}{a^2} e \sin(nt + \varepsilon - \omega).$$

L'influence de la figure du Soleil introduit donc dans les expressions de la longitude de l'époque et du périhélie des termes croissant comme le temps, tandis que l'excentricité n'est sujette qu'à des variations périodiques.

77. Les variations précédentes produisent des inégalités correspondantes dans l'expression du rayon vecteur et de la longitude vraie de m. On a dans l'orbite elliptique

$$v = nt + \varepsilon + 2e \sin(nt + \varepsilon - \omega).$$

En différentiant cette expression par rapport à la caractéristique δ, on trouve,

$$\delta v = \zeta + \delta\varepsilon + 2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \omega) - 2e\delta\omega \cos(nt + \varepsilon - \omega).$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes dans cette expression et qu'on néglige tous les termes périodiques, on aura

$$\delta v = -\left(3ag - 2\frac{k}{a^2}\right)nt - \frac{2knt}{a^2}\, e\cos(nt + \varepsilon - \omega).$$

Si l'on veut donc que le moyen mouvement soit représenté par nt dans l'orbite troublé comme dans l'orbite elliptique, conformément à ce que nous avons dit n° 92, livre II, le premier terme de cette valeur doit être égal à zéro, ce qui donne pour déterminer la constante g, $3ag - \frac{2k}{a^2} = 0$, et par conséquent

$$g = \frac{2}{3}\frac{k}{a^3}.$$

On aura donc ainsi

$$\delta a = \frac{4}{3}\frac{k}{a}.$$

En différentiant de même par rapport à δ la valeur de r, on a

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{\delta a}{a} - \delta e\cos(nt + \varepsilon - \omega) - e\delta\omega\sin(nt + \varepsilon - \omega.)$$

En substituant pour δa, δe, et $\delta\omega$, leurs valeurs, et négligeant les termes simplement périodiques, on aura

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{1}{3}\frac{k}{a^2} - \frac{knt}{a^2}\, e\sin(nt + \varepsilon - \omega).$$

78. On voit donc que l'ellipticité du Soleil introduit des variations séculaires dans l'expression de la longitude et du rayon vecteur; et ces inégalités ayant

pour diviseur le carré du demi-grand axe de l'orbite de m, elles seront d'autant plus sensibles que la planète sera plus rapprochée du Soleil. Par conséquent, si les variations précédentes pouvaient acquérir une valeur appréciable, c'est principalement dans le mouvement de Mercure que leur influence se ferait sentir. Supposons donc que M représente la masse de cette planète, et désignons par S celle du Soleil que nous regarderons comme un sphéroïde homogène, on a dans ce cas $h = \frac{5}{4} q$; la valeur du coefficient k devient ainsi

$$k = \frac{3}{4} q D^2,$$

q étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur solaire, et D le demi-diamètre de cet équateur. Or, si l'on nomme m la vitesse angulaire de rotation du Soleil, la force centrifuge sous l'équateur sera $m^2 D$, n° 1[illegible], livre I, et la pesanteur $\frac{S}{D^2}$. D'ailleurs, en nommant a' le demi-grand axe de l'orbe solaire, et $n't$ son mouvement dans l'écliptique, on a, à très peu près, $S = a'^3 n'^2$; on aura donc

$$q = \frac{m^2 D^3}{n'^2 a'^3}.$$

La durée de la rotation du Soleil, suivant les observations, est de $25^j,417$; la durée de la révolution sydérale de la Terre est de 365^j256, les moyens mouvemens mt et $n't$ sont réciproques à ces deux nombres. On a donc

$$\frac{m}{n'} = \frac{365,256}{25,417}.$$

Le demi-diamètre du Soleil, observé dans sa moyenne distance à la Terre, est de 16′1″,6, ce qui donne

$$\frac{D}{a'} = \sin(16'\,1'',6).$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$\log q = 5{,}3206940\,,$$

et le mouvement du périhélie, qui est égal à $\frac{kn}{a^2}t$ devient ainsi égal à

$$\frac{3}{4}\,q\sin^2(16'1'',6).\left(\frac{a'}{a}\right).nt.$$

On a d'ailleurs

$$a = 0{,}38709812\,,$$
$$a' = 1{,}00000000\,,$$
$$n = 5323416'',79.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouve pour le mouvement du périhélie produit par l'ellipticité du Soleil 0″,0121031.... Cette valeur ne s'éleverait guère qu'à une seconde en cent ans, l'inégalité correspondante de l'époque serait double de celle-ci; ces variations sont donc à très peu près insensibles, et elles deviendraient plus petites encore si le Soleil au lieu d'être homogène est composé, comme tout porte à le croire, de couches dont la densité croît de la surface au centre. On pourra donc négliger l'effet de l'ellipticité du Soleil sur le mouve-

ment en longitude de Mercure, et à plus forte raison sur celui des planètes plus éloignées du Soleil.

79. Considérons maintenant l'influence de la figure du Soleil sur la position de l'orbite. Pour la déterminer, en prenant pour plan fixe celui de l'équateur solaire, et en changeant φ en γ, et α en ψ dans les formules (5) et (6) du nº 42, livre II, on aura

$$d\psi = andt\left(\frac{dR}{\sin\gamma d\gamma}\right), \quad d\gamma = -andt\left(\frac{dR}{\sin\gamma d\psi}\right).$$

La valeur de R, en y conservant les termes de l'ordre γ^2, devient

$$R = \frac{1}{3}\frac{k}{r^3}\cdot\left\{1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma[1-2\cos 2(v-\psi)]\right\},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{\sin\gamma d\gamma} = -\frac{k}{r^3}[1-2\cos 2(v-\psi)],$$

$$\frac{dR}{\sin\gamma d\psi} = \frac{2k}{r^3}\sin\gamma\sin 2(v-\psi);$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules précédentes, et qu'on intègre en observant que nous négligerons ici les excentricités, ce qui permet de faire $r=a$ et $v=nt+\epsilon$, on aura

$$\delta\theta = -\frac{k}{a^2}[nt-\sin 2(nt+\epsilon-\psi)],$$

$$\delta\gamma = \frac{k}{a^2}\sin\gamma\cos 2(nt+\epsilon-\psi)].$$

On voit par ces équations qu'en vertu de l'ellipticité du Soleil, le nœud de l'orbite de la planète sur

l'équateur solaire est sujet à un mouvement rétrograde qui est égal au mouvement direct du périhélie, du moins tant qu'on néglige les quantités de l'ordre γ^2.

L'inclinaison au contraire, comme l'excentricité, n'est soumise qu'à des inégalités périodiques. Il suit de là que l'ellipticité du Soleil n'ajoute rien aux équations (e) et (p) des nos 65 et 69 du livre II, et qu'elle n'altère point, par conséquent, la stabilité du système du monde, ni l'invariabilité du plan que nous avons nommé plan invariable dans le no 79 du même livre.

La valeur de $\delta\theta$ introduit dans l'expression de la latitude s de m rapportée à l'équateur solaire la variation séculaire

$$\delta s = \frac{knt}{a^2} \sin\gamma \cos(nt + \varepsilon - \psi).$$

Mais cette variation, comme celle du nœud de l'orbite, est insensible, d'après ce qu'on a vu pour Mercure, et à plus forte raison pour les autres planètes.

Il est clair que les formules précédentes s'appliqueraient également à la Lune, et donneraient les inégalités de son mouvement dues à la non sphéricité de la Terre; ces formules feront connaître, en général, l'influence de la figure des planètes sur les mouvemens de leurs satellites.

CHAPITRE VII.

De l'action des étoiles sur le système planétaire.

80. On peut considérer les étoiles comme des astres séparés de nous par des espaces immenses et qui sont absolument immobiles dans le ciel, ou animés du moins de mouvemens d'une extrême lenteur. Déterminons l'influence que de pareils corps doivent exercer sur notre système planétaire.

Soit m' la masse d'une étoile; en désignant comme à l'ordinaire par R la fonction perturbatrice qui résulte de son action, on a, n° 1,

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right],$$

x', y', z', étant les trois coordonnées rectangulaires de m' rapportées au centre du Soleil, r' sa distance à ce centre, et x, y, z, r, désignant des quantités analogues relativement à m.

Prenons pour plan fixe celui de l'orbite de la planète à une époque déterminée; en nommant v sa longitude, et s sa latitude au-dessus du plan fixe, et négligeant les quantités de l'ordre du carré de s, on aura

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad z = rs.$$

Soient α la latitude de l'étoile, et β sa longitude, on aura

$$x' = r'\cos\beta\cos\alpha, \quad y = r'\sin\beta\cos\alpha, \quad z = r'\sin\alpha.$$

La substitution de ces valeurs, donne

$$R = m'\left\{\frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'[\cos\alpha\cos(v-\beta) + s\sin\alpha]}} - \frac{rr'[\cos\alpha\cos(v-\beta) + s\sin\alpha]}{r'^3}\right\}.$$

La distance des étoiles au Soleil étant très grande, relativement à celle des planètes, si l'on développe cette expression par rapport aux puissances descendantes de r', et qu'on néglige celles qui seraient au-dessous de r'^3, on trouvera

$$R = \frac{m'}{r'} - \frac{m'r^2}{4r'^3}\left\{2 - 3\cos^2\alpha[1 + \cos 2(v-\beta)] - 6s\sin 2\alpha\cos(v-\beta)\right\}, \quad (m)$$

s étant une quantité très petite qui dépend de l'action des planètes sur m, et qui est de l'ordre des forces perturbatrices, on peut la négliger lorsqu'on ne considère que les variations des élémens de l'orbite de m qui ne contiennent pas les différences de R relatives à cette quantité; on aura ainsi

$$R = \frac{m'}{r'} - \frac{m'r^2}{4r'^3}\cdot[2 - 3\cos^2\alpha - 3\cos^2\alpha\cos 2(v-\beta)].$$

r', ainsi que α et β, dépendant des déplacemens de l'étoile, et ne variant par conséquent qu'avec une extrême lenteur, on pourra les regarder comme des quantités constantes, pendant un grand nombre de siècles.

Par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - \frac{1}{2}e^2\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi),$$
$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin 2(nt+\varepsilon-\varpi),$$

en négligeant les cubes des excentricités, et dans la valeur de v, les termes dépendans du carré de s.

De là il est facile de conclure

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - 2e\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - \frac{1}{2}e^2\cos 2(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$\cos 2(v-\theta) = (1-4e^2)\cos 2(nt+\varepsilon-\theta) - 2e\cos(nt+\varepsilon+\varpi-2\theta)$$
$$+ \frac{3}{4}e^2\cos 2(\varpi-\theta) + \text{etc.}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de R, en ne retenant que les termes indépendans du temps, on trouvera

$$R = \frac{m'}{r'} - \frac{m'a^2}{4r'^3}\left[\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(2-3\cos^2\alpha) - \frac{15}{2}e^2\cos^2\alpha\cos 2(\varpi-\theta)\right];$$

d'où en différentiant et en nommant, pour abréger, $R_{,}$, le second terme de la valeur précédente, on tirera

$$a\frac{dR}{da} = -2R_{,}, \quad \frac{dR}{d\varpi} = -\frac{15m'a^2e^2}{r'^3}\cos^2\alpha\sin 2(\varpi-\theta),$$
$$\frac{dR}{de} = -\frac{3m'a^2e}{4r'^3}[2-3\cos^2\alpha-5\cos^2\alpha\cos 2(\varpi-\theta)].$$

Par les formules de la variation des élémens elliptiques, en négligeant les carrés de l'excentricité de l'orbite, on a, n° 42, livre II,

$$de = -\frac{1}{2}aed'R - andt\left(\frac{dR}{ed\varpi}\right),$$
$$d\varpi = andt\left(\frac{dR}{ede}\right).$$

Lorsqu'on ne considère, comme nous le faisons, que les variations séculaires, on peut supprimer le premier terme de la valeur de de, parce que l'intégrale $\int d'R$ ne produit que des inégalités périodiques et un terme constant. D'après les formules précédentes, on aura donc, en intégrant

$$\delta e = \frac{15m'a^3nt}{4r'^3} e \cos^2\alpha \sin 2(\omega - \mathcal{C}),$$

$$\delta\omega = -\frac{13m'a^3nt}{4r'^3}[2 - 3\cos^2\alpha - 5\cos^2\alpha \cos 2(\omega - \mathcal{C})].$$

L'excentricité de l'orbite pourra donc croître progressivement en vertu de l'action des étoiles, et le périhélie aura un mouvement séculaire rétrograde; mais comme le diviseur r'^3 qui entre dans les valeurs précédentes, est très considérable à cause de la distance des étoiles, il faudrait supposer à m', qui représente leur masse, une valeur excessivement grande pour que ces variations pussent devenir sensibles.

81. Considérons maintenant les variations séculaires du moyen mouvement et de l'époque. En observant que la partie constante de la fonction $\frac{dR}{de}$ étant déjà multipliée par e, la fonction $e\frac{dR}{de}$ serait de l'ordre du carré des excentricités, quantités que nous négligeons, on aura pour les déterminer

$$d\zeta = -3andt\int d'R, \quad d\epsilon = -2a^2ndt\left(\frac{dR}{da}\right).$$

En nommant donc, comme précédemment, g la constante ajoutée à l'intégrale $\int d'R$, et en substituant

pour $a\,\frac{dR}{da}$ sa valeur, ces formules donneront en intégrant

$$\zeta = -3angt, \quad \delta\varepsilon = -4antR_{,}.$$

On aura donc pour l'expression de la longitude moyenne

$$\int ndt + \delta\varepsilon = nt(1 - 3ag - 4aR_{,}).$$

Pour que le moyen mouvement soit représenté par nt dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé, il faut qu'on ait $3ag = -4aR_{,}$, ou bien, en remettant pour $R_{,}$ sa valeur et négligeant le carré des excentricités,

$$3ag = \frac{m'a^3}{r'^3}(2 - 3\cos^2\alpha).$$

La variation du grand axe est donnée par l'équation $\delta a = 2a^2\int dR = 2a^2 g$; on aura donc

$$\delta a = \frac{2m'a^4}{3r'^3}(2 - 3\cos^2\alpha),$$

$$\zeta = -\frac{m'a^3 nt}{r'^3}(2 - 3\cos^2\alpha).$$

Les valeurs précédentes de r et de v, en les différentiant par rapport à la caractéristique δ, négligeant les carrés des excentricités, et en observant que la variation de la longitude moyenne est nulle par ce qui précède, puisque nous ne nous occupons ici que des variations séculaires, donnent

$$\delta\frac{r}{a} = -\delta e\cos(nt+\varepsilon-\omega) - e\delta\omega\sin(nt+\varepsilon-\omega),$$

$$\delta v = 2\delta e\sin(nt+\varepsilon-\omega) - 2e\delta\omega\cos(nt+\varepsilon-\omega).$$

En substituant donc pour δe, et $\delta\varpi$, leurs valeurs, on aura

$$\delta\frac{r}{a} = \frac{3m'a^3nt}{4r'^3}(2-3\cos^2\alpha)\,e\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$-\frac{15m'a^3nt}{4r'^3}\cos^2\alpha\,e\sin(nt+\varepsilon-\varpi-2\mathfrak{C}+2\omega),$$
$$\delta v = \frac{6m'a^3nt}{4r'^3}(2-3\cos^2\alpha)\,e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$-\frac{30m'a^3nt}{4r'^3}\cos^2\alpha\,e\cos(nt+\varepsilon-\varpi-2\mathfrak{C}+2\omega).$$

Ces valeurs s'accordent avec celles que Laplace a obtenues d'une autre manière. (*Connaissance des Tems*, pour 1829.)

La variation du grand axe introduit dans l'expression de δr un terme constant, mais il faut observer que la partie $\delta e\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+e\delta\varpi\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$ produit aussi un terme semblable; lorsque l'on conserve dans les valeurs de δe et de $e\delta\varpi$ les termes dépendans des sinus et cosinus de l'anomalie $nt+\varepsilon-\varpi$, on trouve aisément que ce terme se réduit à $-\frac{m'a^4}{2r'^3}(2-3\cos^2\alpha)$. On aura ainsi pour la partie constante de δr, due à l'action des étoiles,

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'a^3}{6r'^3}(2-3\cos^2\alpha).$$

82. Considérons maintenant les perturbations qui résultent de la même cause dans la position du plan de l'orbite. En nommant φ l'inclinaison de ce plan mobile sur celui de son orbite primitive, et θ la longitude de son nœud ascendant, on a

$$d\varphi = -\frac{andt}{\sin\varphi}\left(\frac{dR}{d\theta}\right), \quad d\theta = \frac{andt}{\sin\varphi}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right).$$

L'expression (m) de R donne, en différentiant,

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{d\varphi}, \quad \frac{dR}{d\theta} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{d\theta};$$

s étant le sinus de la latitude de m au-dessus du plan fixe, on a

$$s = \sin\varphi\sin(v - \theta);$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds}{d\varphi} = \cos\varphi\sin(v - \theta), \quad \frac{ds}{d\theta} = -\sin\varphi\cos(v - \theta).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dR}{ds} = \frac{6m'a^2}{4r'^3}\sin 2\alpha\cos(v - \mathcal{C});$$

on aura donc

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{6m'a^2}{4r'^3}\sin 2\alpha\sin(v - \theta)\cos(v - \mathcal{C}),$$

$$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{6m'a^2}{4r'^3}\sin\varphi\sin 2\alpha\cos(v - \theta)\cos(v - \mathcal{C}).$$

En substituant ces valeurs dans les formules précédentes, et en intégrant ensuite, en négligeant les excentricités, ce qui permet de supposer $v = nt + \varepsilon$, on aura

$$\delta\varphi = \frac{3m'a^3}{4r'^3}\sin 2\alpha\left[nt\cos(\theta - \mathcal{C}) + \frac{1}{2}\sin(2nt + 2\varepsilon - \theta - \mathcal{C})\right],$$

$$\sin\varphi\,\delta\theta = -\frac{3m'a^3}{4r'^3}\sin 2\alpha\left[nt\sin(\theta - \mathcal{C}) + \frac{1}{2}\cos(2nt + 2\varepsilon - \theta - \mathcal{C})\right].$$

L'inclinaison de l'orbite est donc sujette à une varia-

tion séculaire, et le nœud à un mouvement rétrograde sur le plan fixe; c'est l'effet le plus sensible de l'action des étoiles sur le système planétaire, puisqu'on voit en effet que les expressions précédentes sont les seules parmi les variations séculaires résultant de cette cause, qui soient indépendantes de l'excentricité de l'orbite.

En différentiant, par rapport à δ, l'expression de la latitude, et négligeant les termes dépendans des excentricités et du carré des inclinaisons, on a

$$\delta s = \delta\varphi \sin(nt + \epsilon - \theta) - \sin\varphi\delta\theta \cos(nt + \epsilon - \theta).$$

En n'ayant donc égard qu'aux variations séculaires, en vertu des valeurs de $\delta\varphi$ et $\sin\varphi\delta\theta$, on aura

$$\delta s = \frac{3m'a^3nt}{4r'^3} \sin 2\alpha \sin(nt + \epsilon - 6).$$

Cette variation séculaire du mouvement en latitude, surpasse, comme on voit, celles du mouvement en longitude et du rayon vecteur; elle sera d'autant plus sensible, que la moyenne distance de la planète au Soleil sera plus considérable, mais son diviseur est lui-même si grand, qu'il est évident qu'elle ne saurait devenir appréciable qu'après un grand nombre de siècles.

Supposons, par exemple, que m soit la Terre, d'après les suppositions les plus vraisemblables sur la distance des étoiles, r' ne peut être au-dessous de $100000a$, en faisant donc $a=1$ et $n=1295977''35$, la quantité $\frac{3m'a^3n}{4r'^3}$ sera moindre que $0'',0000000097$, ainsi le terme précédent de la valeur de δs n'excé-

dera pas

$$0'',0000000097 m' t;$$

t désignant un nombre d'années juliennes, en sorte qu'il faudrait supposer aux étoiles une masse cent fois plus grande que celle du Soleil, pour que ce terme pût s'élever à $10''$ dans un million d'années. Il en serait de même, à plus forte raison, relativement au rayon vecteur et à la longitude. On peut donc regarder, quant à présent, l'influence des étoiles sur le mouvement des planètes, comme absolument insensible.

Concluons donc que l'action des étoiles sur le système solaire introduit, à la vérité, des variations séculaires dans les excentricités et les inclinaisons des orbites des planètes, et que comme ces inégalités ne satisfont pas aux équations de condition (e) et (p), n°s 65 et 69, livre II, il s'ensuit que la stabilité du système planétaire n'existe plus relativement à cette cause perturbatrice. Mais à raison de l'extrême éloignement des étoiles, les effets qui en résultent seront probablement toujours inappréciables, et dans tous les cas ils ne pourront se manifester que dans des temps très éloignés.

Nous ne terminerons pas cet article sans faire remarquer encore une fois combien la méthode de la variation des élémens elliptiques que nous avons employée dans ce chapitre et dans celui qui le précède est supérieure, pour traiter les questions du genre de celles que nous avons considérées, à l'intégration directe des équations du mouvement troublé. Non-seulement cette méthode donne, de la manière la

plus simple, toutes les inégalités du mouvement de la planète en longitude et en latitude, mais elle a seule l'avantage d'indiquer clairement l'influence de la force perturbatrice sur chacun des élémens de son orbite, et d'offrir ainsi le moyen de remonter aisément des effets aux causes, au milieu de toutes les influences diverses qui compliquent les mouvemens planétaires.

CHAPITRE VIII.

Inégalités du mouvement des planètes produites par l'action des satellites et des comètes.

83. Les masses des satellites sont en général si petites relativement à celles des planètes qu'ils accompagnent, que les perturbations qu'ils causent dans leurs mouvemens ne peuvent être que très peu considérables, elles paraissent même tout-à-fait insensibles excepté pour la Terre troublée par la Lune. Il serait donc inutile de nous occuper long-temps de ces perturbations, mais leur détermination peut devenir très simple par les propriétés du centre de gravité.

En effet, nous avons vu, n° 11, livre II, que la planète M décrivait à très peu près le même orbite que si sa masse et celle de ses satellites étaient réunis au centre commun de gravité du système. En sorte que si dans les formules des chapitres précédens on augmente la masse de la planète que nous désignerons par M, des masses de ses satellites, l'orbite qui en résultera sera celle du centre de gravité du système, et pourra aussi être regardée comme l'ellipse même de la planète résultant de la première approximation.

Cela posé, soient X, Y, Z, les coordonnées de M rapportées à ce centre pris pour origine des coordonnées, et au plan de son orbite choisi pour plan des X et des Y; soit de plus V l'angle que forme avec une ligne fixe, d'où l'on compte les longitudes, l'axe des X. Nommons m, m', m'', etc., les masses des satellites, r, r', r'', etc., leurs rayons vecteurs, v, v', v'', etc., leurs longitudes sur le plan de l'orbite de M, et s, s', s'', etc., leurs latitudes au-dessus de ce plan. Les coordonnées de m, m', etc., relatives au centre commun de gravité, seront $X + r\cos(v - V)$, $Y + r\sin(v - V)$, $Z + rs$, $X + r'\cos(v' - V)$, etc. Par les propriétés de ce centre, on aura donc

$$(M + \Sigma m)X + mr\cos(v - V) + m'r'\cos(v' - V) + \text{etc.} = 0,$$
$$(M + \Sigma m)Y + mr\sin(v - V) + m'r'\sin(v' - V) + \text{etc.} = 0,$$
$$(M + \Sigma m)Z + mrs + m'r's' + \text{etc.} = 0.$$

La caractéristique Σ devant s'étendre à tous les satellites.

On aura donc immédiatement, au moyen de ces équations, les valeurs des trois coordonnées X, Y, Z, de la planète relatives au centre commun de gravité au moyen des valeurs de r, v, s, r', v', s', etc., supposées connues. Or, ces quantités dépendent des positions des satellites entre eux et par rapport au Soleil. La simple configuration des satellites d'une planète suffira donc pour déterminer à chaque instant ses perturbations dans l'orbite qu'elle décrirait sans l'action de ses satellites. Les inégalités que cette action produit sont par conséquent toutes périodi-

ques, et l'on voit en outre que les masses des satellites étant en général très petites, relativement à celles des planètes principales, ces inégalités seront très peu considérables. Elles sont insensibles pour Jupiter, et il est probable qu'il en est de même pour Saturne et Uranus.

84. L'action des planètes cause dans le mouvement des comètes des perturbations très sensibles; elle peut même changer entièrement la nature de leurs orbites, comme cela paraît avoir eu lieu relativement à la comète de 1770, lorsqu'elle s'est trouvée dans le voisinage de Jupiter. Si les masses des comètes étaient comparables à celles des planètes, il résulterait de leur réaction des perturbations correspondantes dans le mouvement des planètes. Ainsi, par exemple, la comète de 1770, qui est celle qui a le plus approché de la Terre, aurait altéré la durée de l'année sidérale, et aurait causé quelque dérangement dans le système des satellites de Jupiter qu'elle a traversé en entier. Or, rien de semblable n'a eu lieu ; et comme l'observation n'a indiqué jusqu'ici dans le mouvement des planètes ou des satellites aucune inégalité provenant de pareille cause, on doit supposer que les masses des comètes sont tellement petites, que leur influence sur le système planétaire est tout-à-fait insensible. Leur choc même, si dans l'immensité des siècles quelqu'une d'entre elles venait à rencontrer sur sa route une planète ou un satellite, ne causerait très probablement dans la marche de ces astres que de faibles altérations.

CHAPITRE IX.

Du plan invariable du système du monde.

85. Nous avons nommé *plan invariable* du système du monde, un plan qui a la propriété de rester toujours parallèle à lui-même, quels que soient les changemens qu'éprouvent les excentricités et les positions des orbites planétaires par l'effet des variations séculaires. Nous avons démontré, n° 79, livre II, l'invariabilité de ce plan, en ayant même égard au carré de la force perturbatrice, et l'on a pu voir, n° 55, qu'en effet ce résultat se vérifie relativement aux inégalités séculaires des élémens des orbites de Jupiter et de Saturne, dépendantes des termes qui produisent les deux grandes inégalités de ces planètes. Nous ajouterons encore quelques mots aux considérations que nous avons présentées sur ce sujet dans différens endroits de cet ouvrage.

Considérons généralement un système de corps m, m', etc., réagissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui ne sont soumis à l'action d'aucune force étrangère. En nommant dm l'un des élémens de m, et x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires rapportées au centre de gravité du sys-

tème, par la propriété de la conservation des *aires*, on aura, n° 23, livre Ier;

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.S\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)dm &= l,\\ \Sigma.S\left(\frac{xdz - zdx}{dt}\right)dm &= l',\\ \Sigma.S\left(\frac{ydz - zdy}{dt}\right)dm &= l''.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Les intégrales S devant s'étendre à la masse entière de m, et la caractéristique Σ comprenant toutes les intégrales semblables relatives à m', m'', etc.

Les trois constantes l, l', l'', déterminent la position d'un plan que nous appellerons *plan maximum des aires* pour le distinguer de celui que nous avons nommé plus spécialement *plan invariable*. En effet, soit Φ l'inclinaison de ce plan sur celui des xy, et Π la longitude de son nœud, on aura, n° 23, livre Ier,

$$\tang \Phi \sin \Pi = \frac{l''}{l}, \quad \tang \Phi \cos \Pi = \frac{l'}{l}.$$

Cela posé, soit x, y, z, les coordonnées du centre de gravité de m, et ζ, η, ξ, les coordonnées de l'élément dm relatives à ce centre, on aura

$$x = x + \zeta, \quad y = y + \eta, \quad z = z + \xi.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1), et observant que par la nature du centre de gravité les trois intégrales $S.\zeta dm$, $S.\eta dm$, $S.\xi dm$, ainsi que leurs différences relatives au temps t sont nulles

d'elles-mêmes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.m\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)+\Sigma.Sdm\left(\frac{\zeta d\eta-\eta d\zeta}{dt}\right)&=l,\\ \Sigma.m\left(\frac{xdz-zdx}{dt}\right)+\Sigma.Sdm\left(\frac{\zeta d\xi-\xi d\zeta}{dt}\right)&=l',\\ \Sigma.m\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)+\Sigma.Sdm\left(\frac{\eta d\xi-\xi d\eta}{dt}\right)&=l''.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ces valeurs se composent, comme on voit, de deux parties, l'une relative aux aires résultantes du mouvement de translation des corps m, m'', etc., supposés concentrés dans leur centre de gravité respectifs, la seconde aux aires que produisent leurs mouvemens de rotation autour de ces centres regardés comme des points fixes.

Si l'on rapporte les coordonnées des corps m, m', etc., à l'un d'entre eux M, pris pour centre des mouvemens, les premiers termes des trois équations précédentes coïncideront respectivement avec les premiers membres des équations (A), n° 77, livre II; et l'on doit remarquer que les seconds termes de ces formules représentent ici ceux qu'introduirait dans ces mêmes équations la considération des termes de la fonction perturbatrice R dépendans de la figure du Soleil et des planètes. Ce n'est donc pas sans le savoir que dans la théorie du plan invariable, n° 78, livre II, on a négligé les aires provenant de la rotation du Soleil et des planètes, cette omission a été volontaire, et l'on va voir qu'en effet elle est parfaitement justifiée.

86. On peut donner aux équations (2) une autre

forme. En effet, si l'on désigne par A, B, C, les trois momens d'inertie du corps m par rapport aux trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité, par p, q, r, les composantes de sa vitesse de rotation suivant ces mêmes axes, et par a, b, c, les cosinus des angles que forme respectivement avec eux l'axe des coordonnées x, on aura

$$S.dm\left(\frac{\zeta d\eta - \eta d\zeta}{dt}\right) = Aa''p + Bb''q + Cc''r,$$

l'intégrale S devant être étendue à la masse entière du corps m. On aurait des expressions analogues pour les aires relatives aux plans des xz et des yz; les équations (2) deviendront ainsi

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma.m\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)+\Sigma.(Aa''p+Bb''q+Cc''r)=l,\\ &\Sigma.m\left(\frac{xdz-zdx}{dt}\right)+\Sigma.(Aa'p+Bb'q+Cc'r)=l',\\ &\Sigma.m\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)+\Sigma.(Aap+Bbq+Ccr)=l''.\end{aligned}\right\}(3)$$

Le signe Σ devant être étendu à tous les corps agissans du système.

Remarquons maintenant que si les corps m, m', etc., étaient parfaitement sphériques, ou si aucune force étrangère ne troublait leur mouvement de rotation, la quantité $Aa''p + Bb''q + Cc''r$, serait constante par elle-même, n° 35, livre Ier, quelle que fût la nature de ces corps; son introduction dans les équations précédentes ne ferait donc que changer la valeur de la constante l, il en serait de même relativement aux

quantités analogues qui entrent dans les deux dernières équations (3). Soit donc c, c', c'', ce que deviennent alors les trois constantes l, l', l'', il est clair que le plan qui en résultera et qui est celui que nous avons nommé *plan invariable* dans la théorie du système du monde, sera tout aussi immuable que le plan *maximum* des aires; mais il aura sur lui l'avantage que sa position sera facile à déterminer, parce qu'elle ne dépendra que des données fournies par l'observation, tandis que celle du plan *maximum* des aires exigerait qu'on eût déterminé d'abord les momens d'inertie A, B, C, etc., de toutes les planètes qui nous seront probablement toujours inconnues.

Ce n'est donc qu'à raison de la différence qui existe entre la figure des corps célestes et celle de la sphère, et des inégalités périodiques et séculaires qui résultent, dans les seconds termes des équations (3), de ce que les forces qui les animent ne passent pas exactement par leur centre de gravité, que le plan que nous avons déterminé dans le n° 78 du livre II, pourrait ne pas demeurer toujours parallèle à lui-même dans les différens siècles. Mais, d'abord, en étendant à tous les corps célestes ce que nous avons démontré relativement à la Terre, n° 20, livre IV, leurs pôles de rotation étant fixes à leur surface, et leur vitesse de rotation pouvant être regardée comme constante quand on néglige les quantités périodiques, si l'on suppose, comme dans le n° 14, que le mouvement de rotation de m s'effectue autour de son troisième axe principal, on aura $p = 0$, $q = 0$

et $r = \omega$, en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation. Soit donc λ l'angle que forme l'axe de rotation avec l'axe des z, on aura simplement

$$\Sigma . m\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right) + \Sigma . \text{C}\,\omega \cos \lambda = l. \quad (4)$$

En nommant μ et ν les angles que forme respectivement le même axe avec les axes des y et des x, les deux dernières équations (3) prendraient une forme semblable; et l'on voit par conséquent que si les seconds termes de ces équations sont affectés de quelques variations séculaires, elles ne peuvent provenir que de la variation des angles λ, μ et ν.

Or, supposons d'abord qu'il s'agisse du Soleil. Si les angles λ, μ, ν étaient sujets à quelque inégalité séculaire sensible, comme le moment d'inertie C est très grand à raison de la masse et du volume du Soleil, il en pourrait résulter dans $\text{C}\omega \cos \lambda$ des inégalités susceptibles de devenir considérables. Mais il y a lieu de croire que ce cas n'arrive pas dans la nature. En effet, les déplacemens de l'équateur solaire résultant de l'action des planètes, sont d'abord excessivement petits comparés à ceux des équateurs planétaires résultant de l'action réciproque du Soleil sur ces corps. Les variations des angles λ, μ, ν seraient donc déjà très peu considérables par cette seule raison, quelles que fussent d'ailleurs la figure et la constitution du Soleil; mais comme ces variations sont, en outre de l'ordre, l'aplatissement du Soleil, quantité

nécessairement très petite, puisque nous avons vu qu'il n'en résultait dans les mouvemens des planètes aucune inégalité appréciable, on doit les regarder comme tout-à-fait insensibles. On peut donc considérer les seconds termes des équations (3) comme constans et le plan invariable comme inaltérable en tant qu'on n'a égard qu'à l'action du Soleil.

Nous étions déjà parvenu à ce résultat dans le n° 79, après avoir démontré que les excentricités et les inclinaisons des orbites planétaires n'étaient affectées d'aucune inégalité à longue période dépendant de l'ellipticité du sphéroïde solaire.

Supposons maintenant que le terme $C\omega \cos \lambda$ se rapporte à une planète. Il arrivera ici le contraire de ce qui a lieu pour le Soleil. La position des équateurs planétaires changeant sensiblement avec le temps, la valeur de $\cos \lambda$ sera affectée d'inégalités séculaires qu'on ne pourra pas négliger, mais comme le facteur $C\omega$ qui le multiplie est alors une très petite quantité, il n'en pourra résulter encore dans l'équation (4) que des quantités insensibles.

Prenons pour exemple la Terre, que nous regarderons comme un ellipsoïde homogène et de révolution. Soit D le demi-diamètre de l'équateur, on aura $C = \frac{2}{5}\, mD$, et cette valeur sera plus grande qu'elle ne devrait l'être réellement, parce que les couches terrestres diminuent de densité du centre à la surface, n° 46, livre V; le second membre de l'équation (4) contiendra donc le terme $\frac{2}{5}\, mD^2\omega \cos \lambda$, ω étant la vitesse angulaire de rotation de la

Terre, et λ l'obliquité de l'écliptique en supposant qu'on prend ce plan pour celui des xy. Or, si l'on nomme a la distance moyenne de la Terre au Soleil et n sa vitesse moyenne dans son mouvement annuel, le terme relatif à la Terre dans le premier membre de la même équation sera ma^2n. La durée de la révolution sidérale de la Terre est de 365,256 d'où l'on tire :

$$\frac{\omega}{n} = 365,256;$$

le rapport de a à D est de 23984 environ, on aura donc ainsi :

$$\frac{\frac{2}{5} m\mathrm{D}^2 \omega}{ma^2 n} = 0,00000025.$$

On voit donc que le mouvement de rotation de la Terre n'introduit dans l'équation (4) que des quantités insensibles relativement à celles qui résultent du mouvement de translation; les variations de ces quantités, qui doivent seules nous occuper ici, seront donc, à plus forte raison, tout-à-fait insensibles, et ne pourront influer sur la valeur de la constante l (*). Il en serait de même de toutes les

(*) Si l'on ne considère, pour un moment, que la Terre, et qu'on fasse abstraction des autres planètes, le plan invariable deviendra le plan même de l'écliptique; et si l'on suppose que l'obliquité varie de 5°, il est aisé de voir que la variation correspondante de la quantité $C\omega \cos \lambda$ ne produirait pas dans l'équation (4) un terme qui fût la cent-millionième partie de la constante l. Il s'ensuit donc que les mêmes forces qui produisent des déplacemens très sensibles dans l'équateur terrestre, sont absolument impuissantes à produire la moindre altération dans la position de l'écliptique.

planètes à raison de la petitesse de leurs dimensions comparées à celles des orbites qu'elles décrivent autour du Soleil. Il suit de là que dans la détermination du plan invariable, on peut se dispenser d'avoir égard à l'ellipticité du Soleil et des planètes, et que ce plan est immuable comme il le serait si tous les corps célestes formaient des points massifs placés à leurs centres de gravité respectifs.

Quant aux satellites, leurs masses étant très petites relativement à celles des planètes principales, les termes qui résulteraient dans les équations (3) de la considération de leurs mouvemens dans leurs orbites, peuvent à tous égards être regardés comme insensibles.

L'action des étoiles sur le système solaire pourrait donc seule altérer à la longue la stabilité du plan invariable; mais comme on l'a vu, si cette influence devait produire des effets appréciables, ce n'est qu'après un grand nombre de siècles qu'ils pourraient se manifester.

Concluons donc enfin que la théorie du plan invariable, telle que nous l'avons présentée d'après Laplace, dans le n° 79 du livre II, ne laisse rien à désirer sous le rapport de l'exactitude; la rigueur des formules et des raisonnemens sur lesquels elle est fondée, le témoignait déjà, mais il était nécessaire d'entrer dans les développemens précédens, pour réduire à leur valeur les objections que l'on avait cru pouvoir élever contre cette théorie, sans les appuyer d'aucune discussion sérieuse. Lorsqu'on applique l'analyse aux phénomènes célestes, sans faire

entrer en considération les dispositions particulières à notre système planétaire, qui modifient ces phénomènes à l'infini, on construit des utopies géométriques presque toujours sans application au monde réel; et lorsqu'on prétend se passer du secours du calcul, ce puissant auxiliaire de l'esprit humain, on tombe le plus souvent dans d'inévitables erreurs. C'est ici le cas de répéter ce que nous disions dans l'introduction de cet ouvrage : les méthodes synthétiques sont insuffisantes pour suivre dans tous leurs développemens les phénomènes qui résultent de la loi de la gravitation ; Newton lui-même s'y trompa, et la plus profonde analyse est le seul guide infaillible dans la savante théorie du mécanisme des cieux.

CHAPITRE X.

Masses et élémens des orbites des planètes.

Nous allons réunir dans ce chapitre les valeurs des différentes quantités qui entrent dans les formules précédentes, et qui se rapportent respectivement à chacune des sept planètes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus. Ces valeurs résultent de la comparaison des formules de la théorie aux résultats de l'observation, ce sont les seules données que la Mécanique céleste emprunte à l'observation.

Masses des planètes, celle du Soleil étant prise pour unité.

87. Nous avons deux moyens de déterminer les masses des planètes, soit par l'observation des élongations de leurs satellites pour celles qui sont accompagnées de satellites, comme on l'a vu n° 28, livre II, soit en comparant les inégalités qu'elles produisent dans leurs mouvemens réciproques en vertu de leur action mutuelle, déduites de l'observation, à ces mêmes inégalités calculées par les for-

mules de la théorie. Les inégalités séculaires seraient celles qui présenteraient pour cet objet les données les plus exactes, mais elles ne sont pas encore assez bien connues en ce moment, pour qu'on puisse les employer à cet usage ; on y supplée en recourant aux inégalités périodiques et en faisant concourir à leur détermination un grand nombre d'observations que l'on combine entre elles de manière à en tirer les résultats les plus probables. C'est par la réunion de ces moyens qu'on a déterminé les valeurs suivantes, qui nous semblent les plus exactes qu'on ait obtenues jusqu'ici des masses planétaires.

Mercure.............. $m = \frac{1}{1909706}$,

Vénus .... $m' = \frac{1}{401839}$,

La Terre............. $m'' = \frac{1}{356354}$,

Mars .... $m''' = \frac{1}{2680337}$,

Jupiter.............. $m^{\text{iv}} = \frac{1}{1053,924}$,

Saturne.............. $m^{\text{v}} = \frac{1}{3512}$,

Uranus............... $m^{\text{vi}} = \frac{1}{17918}$.

La plus importante de ces masses par sa grandeur, et par conséquent par son influence sur les perturbations des planètes et des comètes, est celle de Jupiter. La valeur précédente diffère de celle que nous avons trouvée dans le n° 28, et que l'on a déterminée au moyen des élongations du quatrième satellite de

cette planète. Depuis quelques années, le calcul des perturbations des planètes secondaires Pallas, Junon, Vesta et Cérès, semblaient indiquer que cette masse avait besoin de correction, et faisaient désirer de nouvelles observations des élongations des satellites de Jupiter, d'où dépend la détermination exacte de leur distance moyenne au centre de la planète. En effet, celles dont on avait fait usage jusqu'ici sont dues à Pound, astronome contemporain de Newton, et encore ne les connaît-on que par leurs résultats rapportés dans la troisième partie du livre des Principes. Aujourd'hui que nous possédons des instrumens plus exacts et des méthodes plus correctes, il devenait nécessaire de reprendre ce travail. M. Airy, dont nous avons déjà eu l'occasion de parler, l'a entrepris ; il a fait à l'Observatoire de Cambridge une nouvelle série d'observations, et par leur comparaison aux tables des satellites déduites de la théorie de Laplace, il a déterminé la distance moyenne du quatrième satellite au centre de Jupiter, qu'il a trouvée égale à 0.01257977. On aura donc en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil, et conservant les notations du n° 25 du second livre :

$$a = 1,$$
$$\log a' = 8.0996728,$$
$$\log T = 2.5625977,$$
$$\log T' = 1.2224306.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (m) du même numéro donnent $\frac{1}{1048,69}$ pour la masse de

Jupiter, ou plus exactement pour la somme des masses de la planète et de son quatrième satellite, la masse du Soleil étant prise pour unité. Cette valeur s'accorde d'une manière satisfaisante avec celle qui résulte des perturbations des petites planètes. En effet, Nicolaï, par le calcul des inégalités produites par l'action de Jupiter sur Junon pendant un temps donné, a conclu que la masse de Jupiter était de $\frac{1}{1053,924}$. Encke a déduit des perturbations de Vesta la valeur $\frac{1}{1050,117}$ pour cette même quantité, et Gauss a trouvé la même valeur, ou une valeur à très peu près la même par le calcul des perturbations de Pallas. Enfin, comme on l'a vu n° 73, Encke a déduit des équations de condition qui lui ont servi à déterminer le coefficient constant qui exprime la résistance de l'éther à l'unité de distance, sur la comète périodique de 1819, une masse exprimée par la fraction $\frac{1}{1054,4}$. Tout concourt donc à démontrer que la masse conclue des observations de Pound, et qui a été adoptée par les géomètres depuis Newton, a besoin de corrections, et il ne s'agit plus que de choisir entre les valeurs précédentes. Quoique la méthode fondée sur l'observation des élongations des satellites soit la plus directe et selon nous la plus exacte que l'on puisse employer pour déterminer la masse de Jupiter, cependant comme les observations de M. Airy peuvent n'être point exemptes de quelques légères erreurs, et qu'il

annonce l'intention de les renouveler dans des circonstances plus favorables à ce genre de recherches, dans les années 1834, 1835 et 1836, nous avons cru devoir, en attendant, admettre la masse déduite des perturbations de Junon, parce que c'est celle que les astronomes étrangers ont généralement adoptée, et que, d'ailleurs, le peu de différence qui existe entre elle et les autres valeurs que nous avons rapportées, fait que si elle avait besoin de corrections les résultats suivans n'en seraient que faiblement affectés.

Les masses de Saturne et d'Uranus sont celles qui résultent des équations de condition qui ont servi à la construction des tables de Bouvard. Cette manière de les déterminer doit être préférée ici à celle qui serait fondée sur les élongations observées des satellites de ces deux planètes, parce que, vu leur extrême difficulté, les observations de ces élongations sont encore beaucoup moins certaines que celles des satellites de Jupiter. Il ne faut pas se dissimuler cependant que selon M. Bouvard la masse de Jupiter, déterminée de la même manière, serait de $\frac{1}{1070,5}$, valeur qui diffère peu de celle que l'on déduit des observations de Pound, n° 28, livre II, mais qui ne peuvent nullement concorder avec les résultats des perturbations des petites planètes, ou avec la valeur qui résulte des nouvelles observations de M. Airy. Il est donc très probable que les masses de Saturne et d'Uranus, données par M. Bouvard, ont également besoin de corrections, et nous savons que

cet astronome s'occupe en ce moment pour cet objet d'une nouvelle révision des équations fondamentales de ses tables.

La masse de la Terre a été déterminée par la formule (n) du n° 28, livre II, dans laquelle on a supposé

$$l = 6364551^{m},$$
$$g = 9^{m},81645,$$
$$\log \sin P = \log \sin 8'',60 = 5,5193564.$$

Ces valeurs, qui paraissent plus exactes que celles qui sont rapportées dans le numéro cité, ont donné :

$$m = \frac{1}{356353,6}.$$

Quant aux masses de Mercure et de Mars, lorsque leur action sur les autres planètes n'était pas encore suffisamment connue, on les avait déduites d'une hypothèse empirique sur la loi de leur densité. On avait observé, en comparant les masses de la Terre, Jupiter et Saturne à leur volume, que les densités de ces trois planètes sont à très peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil ; et, en étendant par hypothèse cette loi aux trois planètes Mercure, Mars et Jupiter, il avait été facile d'en conclure leurs masses en supposant connus leurs diamètres, qui sont donnés en effet par l'observation. Mais l'arbitraire de cette hypothèse, qui s'écarte beaucoup, comme on sait, de l'exactitude relativement à Vénus et à Uranus, joint à la difficulté que présente l'observation des diamètres planétaires, laissait beau-

coup d'incertitude dans cette détermination, et il était à désirer qu'on fixât les masses de ces deux planètes par des moyens plus directs. C'est ce qu'a fait Delambre relativement à Mars, dont il a déterminé la masse par les effets qu'elle produit dans le mouvement de la Terre. La comparaison d'un très grand nombre d'observations du Soleil, faites par Bradley et Maskeline, aux formules des perturbations fournies par la théorie, lui a donné $\frac{1}{2546320}$ pour la valeur de cette masse. Mais *Bessel*, après avoir discuté de nouveau les observations employées par Delambre, a jugé que cette quantité devait être réduite à $\frac{1}{2680337}$, et c'est la valeur que nous avons adoptée. Quant à la masse de Mercure, on a conservé celle qui résulte de l'hypothèse précédente sur la loi de densité des planètes, tout en reconnaissant son incertitude; mais on doit observer que la petitesse de cette masse fait que son incorrection ne peut avoir aucune influence sensible sur la détermination des inégalités planétaires. En nommant a et a' les distances moyennes respectives de Mercure et Jupiter au Soleil, D et D' leurs diamètres, m et m' leurs masses, on aura, selon l'hypothèse précédente, pour la masse de Mercure $m = \frac{a'D^3}{aD'^3}\, m'$. En supposant, d'après les observations, les diamètres moyens de Mercure et Jupiter vus à la moyenne distance de la Terre au Soleil respectivement de 21",60 et 626,"04, en substituant ensuite à la place de a et a' les valeurs que nous donnerons plus bas, on trouve,

d'après la masse adoptée précédemment pour Jupiter, la valeur de *m* que nous avons rapportée.

Ainsi donc les valeurs des masses planétaires que nous avons adoptées, celles de la Terre et Mercure exceptées, résultent de la comparaison des observations aux formules analytiques des perturbations, et elles sont toutes déterminées par conséquent d'une manière uniforme et symétrique. Les masses de Jupiter et de Saturne, dont l'effet est si considérable sur les inégalités des planètes, laissent encore quelque incertitude; de nouvelles observations des élongations de leurs satellites permettront bientôt, sans doute, de déterminer ces masses avec plus d'exactitude qu'on ne l'a fait jusqu'ici, et l'accord des valeurs données par des méthodes si différentes en sera la plus sûre vérification.

88. Nous avons donné dans le chapitre V du livre II les formules qui servent à déduire des observations les élémens des orbites planétaires. On peut en général regarder les élémens ainsi obtenus comme une approximation qu'on rendra de plus en plus exacte à mesure que le temps fournira un plus grand nombre d'observations, et développera les diverses inégalités dont les mouvemens planétaires sont affectés. Le meilleur moyen d'y parvenir est de comparer, ainsi que nous l'avons dit pour la correction des masses, un très grand nombre d'observations choisies à cet effet aux longitudes et aux latitudes déduites des tables planétaires calculées avec les élémens de l'orbite relatifs à la première approximation. En donnant ensuite à ces élémens une correc-

tion indéterminée, qu'on supposera assez petite pour qu'on puisse négliger les puissances supérieures à la première, on égalera les variations qui en résulteront dans l'expression de la longitude et de la latitude aux différences que l'on a trouvées entre les lieux observés et les lieux donnés par le calcul. On formera ainsi autant d'équations qu'il y a d'observations employées; en les combinant ensuite par la méthode des moindres carrés, on obtiendra les valeurs des indéterminées qu'elles renferment, qui satisfont le mieux à l'ensemble des observations. A l'aide de ces données, on corrigera les premiers élémens des orbites, et l'on parviendra ainsi aux résultats les plus exacts que puisse fournir sur cet objet, dans l'état actuel de l'Astronomie, le concours de la théorie et de l'observation. C'est de cette manière qu'on a trouvé les valeurs suivantes :

Moyens mouvemens sidéraux des planètes pour une année julienne de 365 *jours* $\frac{1}{4}$, *ou valeurs de* n, n′, *etc.*

Mercure	n	=	5323416″,79
Vénus	n'	=	2106641,52
La Terre	n''	=	1295977,35
Mars	n'''	=	689051,12
Jupiter	n^{iv}	=	109256,29
Saturne	n^{v}	=	43996,72
Uranus	n^{vi}	=	15424,54

Lorsqu'on emploiera les valeurs précédentes pour

n, n', etc., le temps t désignera l'intervalle écoulé depuis l'instant que l'on a choisi pour époque exprimée en années juliennes et en parties de cette année.

De là, en prenant la distance moyenne de la Terre au Soleil pour unité, et en observant que les temps des révolutions des planètes sont en raison inverse de leurs moyens mouvemens, dans le même espace de temps, on a conclu par la troisième loi de Képler, n° 2, livre II, les distances moyennes suivantes des planètes au Soleil.

Distances moyennes des planètes au Soleil, ou demi-grands axes de leurs orbites.

Mercure...........	a	=	0,38709812
Vénus	a'	=	0,72333230
La Terre	a''	=	1,00000000
Mars..............	a'''	=	1,52369352
Jupiter............	a^{iv}	=	5,20116636
Saturne	a^{v}	=	9,53787090
Uranus............	a^{vi}	=	19,18330500

Longitude des époques en 1800, *ou valeurs de* ϵ, ϵ', *etc.*

Mercure......	ϵ	=	110° 13′ 17″,9
Vénus........	ϵ'	=	145.56.52, 1
La Terre......	ϵ''	=	100.23.32, 6
Mars.........	ϵ'''	=	232.49.50, 5
Jupiter	ϵ^{iv}	=	81.52.10, 3
Saturne.......	ϵ^{v}	=	123.05.29, 4
Uranus	ϵ^{vi}	=	173.30.16, 6

Rapports des excentricités aux moyennes distances, ou valeurs de e, e′, *etc., pour* 1800.

Mercure	e	=	0,2055149
Vénus.......	e'	=	0,0068531
La Terre	e''	=	0,01685359
Mars........	e'''	=	0,0933061
Jupiter	e^{iv}	=	0,0481621
Saturne	e^{v}	=	0,0561505
Uranus......	e^{vi}	=	0,0466108

Longitudes des périhélies en 1800, *ou valeurs de* ω, ω', *etc.*

Mercure	ω	=	74° 21′ 41″
Vénus......	ω'	=	128.43. 6
La Terre....	ω''	=	99.29.53
Mars.......	ω'''	=	332.23.40
Jupiter.....	ω^{iv}	=	11. 7.36
Saturne.....	ω^{4}	=	89. 8.20
Uranus.....	ω^{vi}	=	167.30.24

Inclinaisons des orbites à l'écliptique en 1800, *ou valeurs de* φ, φ', *etc.*

Mercure......	φ	=	7° 00′ 9″
Vénus........	φ'	=	3.23.29
La Terre......	φ''	=	0.00.00
Mars..........	φ'''	=	1.50. 6
Jupiter.......	φ^{iv}	=	1.18.52
Saturne......	φ^{v}	=	2.29.38
Uranus.......	φ^{vi}	=	46.26

Longitudes des nœuds ascendans sur l'écliptique de 1800, ou valeurs de α, α', etc.

Mercure.....	α	=	45°57′39″
Vénus... ...	α'	=	74.52.39
La Terre....	α''	=	0.00.00
Mars	α'''	=	48.00.26
Jupiter......	α^{iv}	=	98.25.45
Saturne.....	α^{v}	=	111.56. 7
Uranus	α^{vi}	=	72.59.21

Toutes les longitudes qui précèdent sont comptées à partir de l'équinoxe moyen du printemps de 1800, en prenant pour époque le minuit qui sépare le 31 décembre 1799 du 1ᵉʳ janvier 1800. On doit se rappeler encore que conformément à ce qui a été dit n° 24, livre II, la longitude du périhélie est égale à la distance du périhélie au nœud, augmentée de la longitude du nœud à l'instant que l'on a choisi pour époque.

L'action mutuelle des planètes fait varier insensiblement les élémens de leurs orbites et altère à la longue, par conséquent, les valeurs précédentes; nous déterminerons plus loin ces altérations.

D'après la théorie des variations séculaires, les moyens mouvemens n, n', etc., ainsi que les demi-grands axes a, a', etc., qui s'en déduisent, devraient être invariables, et l'on devrait, par conséquent, retrouver dans tous les siècles les mêmes valeurs pour ces quantités. Mais nous remarquerons que lorsqu'on

déduit des observations les longitudes moyennes $nt + \epsilon$, $n't + \epsilon'$, etc., les termes nt, $n't$, etc., qui croissent avec le temps, contiennent, outre la partie qui dépend du mouvement moyen, une autre partie dépendante du terme proportionnel au temps que renferme l'expression de la longitude des époques ϵ, ϵ', etc. Or, cette dernière partie est nécessairement variable, et nous en donnerons plus loin l'expression. Il résulte de là que les valeurs de n, n', etc., qui précèdent, ainsi que celles de a, a', etc., données directement par les observations, et sans qu'on en ait déduit les parties dépendantes de la variation des époques, ne sont pas rigoureusement constantes, et sont sujettes à quelques légères variations dépendantes de l'action mutuelle des planètes. Au reste, les valeurs que nous avons rapportées sont celles que Laplace avait adoptées, et nous les avons conservées à cause des nombreuses quantités déjà déterminées par M. Bouvard, auxquelles elles servent de base dans la théorie des perturbations planétaires, et dont il eût fallu sans cela reprendre en entier le calcul. Ces valeurs ont subi depuis quelques altérations, tant par les raisons que nous venons d'exposer, que parce que les nouvelles tables astronomiques ont permis de les déterminer avec plus de précision. On trouvera à la fin de ce volume ces nouvelles valeurs ; les différences qu'elles offrent avec celles qui précèdent ne sont pas de nature à altérer d'une manière sensible les résultats qui en sont déduits.

A l'aide des valeurs précédentes de a, a', etc., et des formules données dans le chapitre II, on a cal-

culé les quantités suivantes :

89. *Mercure et Vénus* (*).

$$\alpha = \frac{a}{a'} = 0.53516076,$$
$$\log \alpha = 9.72848422\,;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 0.33162355,$$
$$\log b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = 9.71201453\,-,$$

ensuite

$$\log b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 0.3368948, \quad \log b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 9.7822613, \quad \log b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 9.3919713,$$
$$b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 9.0444085, \quad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 8.7167169, \quad b^{(5)}_{\frac{1}{2}} = 8.4003272,$$
$$b^{(6)}_{\frac{1}{2}} = 8.0904909, \quad b^{(7)}_{\frac{1}{2}} = 7.7827091, \quad b^{(8)}_{\frac{1}{2}} = 7.4666749,$$
$$b^{(9)}_{\frac{1}{2}} = 7.1057826\,;$$

$$\log \alpha \frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.6206935, \quad \log \alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.8922092,$$
$$\alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.7578969, \quad \alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.5682680,$$

(*) La plus grande partie de ces quantités avait été calculée par M. Bouvard, et rapportée dans le tome III de la *Mécanique céleste*. Je leur ai joint celles qui étaient nécessaires à la détermination de nouvelles inégalités reconnues dans le mouvement des planètes. On ne rapporte ici que les valeurs logarithmiques, parce que l'on en fait beaucoup plus usage dans le calcul des perturbations planétaires que des valeurs en nombres.

Le signe — derrière un logarithme indique que le nombre auquel il se rapporte est négatif.

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 9.3556636, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 9.1305323,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 8.8978883, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 8.6627452,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 8.4337148;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 9.8972925, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 9.8418888,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 9.9878111, \quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 9.9860229,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 9.9082265, \quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 9.7869570,$$

$$\alpha^2 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 9.6362375, \quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 9.4630638;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 0.2388655, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.2669528,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 0.2640337, \quad \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 0.3493404,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 0.3913886, \quad \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 0.3790579,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 0.3228136;$$

$$\log \alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^4} = 0.7565832, \quad \log \alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} = 0.8296939,$$

$$\alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} = 0.8811389, \quad \alpha^4 \frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} = 0.9365302;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.6247104,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 3.035376,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0.2901540,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0.0764118,\quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 9.8504422,\quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 9.6167506,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 9.3780470;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0.8256132,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0.7182303,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0.5787622,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0.4175981;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1.3495903,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 1.2839992.$$

Mercure et la Terre.

$$\alpha = \frac{a}{a''} = 0.38709812,$$

$$\log \alpha = 9.58782211;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.31715472,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.57944732 -,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3184766,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.6139897,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.0798265,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.5899496,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 8.1206397,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 7.6630410,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 7.2119211,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 6.7581546,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 6.2479733;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 9.2546937,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.6668706,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.4111261$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 9.0885469,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 8.7394738,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 8.3762238,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 8.0049615,\quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 7.6352138\,;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 9.3989321,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 9.2632798,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 9.5251035,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 9.4433705,\quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 9.2538273,\quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 9.0032852\,;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.4910738,\quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 9.5032222,\quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 9.5003908,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 9.5772965\,;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.4581591,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.1975730,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 9.8736804,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 9.5240220,\quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 9.1868688,\quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 8.7878712\,;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0.2925042,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 0.0728837.$$

Mercure et Mars.

$$\alpha = \frac{a}{a^{iv}} = 0.25405312,$$

$$\log \alpha = 9.40492470\,;$$

on a conclu de là

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.30801002,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.40137750\ -,$$

et ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3082442,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.4157443,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 8.6969275,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.0230878,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 7.3675423,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 6.6812412\,;$$

$$\log \alpha \frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.8424041, \quad \log \alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.4374786, \quad \log \alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.0102082,$$

$$\alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.5092035, \quad \alpha \frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 7.9821981;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.9049228, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.6272693, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.0599375,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.8312281;$$

$$\log b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = 0.3659624, \quad \log b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = 9.9364512, \quad \log b^{(2)}_{\frac{3}{2}} = 9.4347046.$$

Mercure et Jupiter.

$$\alpha = \frac{a}{a^{\text{IV}}} = 0.07442555,$$

$$\log \alpha = 8.87172138;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 0.3016312,$$

$$\log b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = 8.8714210 -.$$

α étant une très petite quantité, les valeurs de $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, etc., ne pourraient se déduire des précédentes, avec une exactitude suffisante, à l'aide des formules ordinaires; elles ont été calculées par le moyen des séries, conformément à ce que nous avons dit n°s 18 et 21, et il en a été de même dans tous les cas semblables.

$$\log b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 0.3016328, \quad \log b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 8.8726282, \quad \log b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 7.6199277,$$

$$b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 6.4800069, \quad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 6.7161703;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 7.7461510, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.8744317, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.9211178,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 6.8889224;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 7.7515640, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 6.9784182, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 7.9184705;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3064558, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.3533647, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 8.3218883.$$

Mercure et Saturne.

$$\alpha = \frac{a}{a^{\text{v}}} = 0.04058547,$$

$$\log \alpha = 8.60837067;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3012088,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.6082811 -,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3012087, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.6086330, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.0920887,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 5.6202402;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 7.2175594, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.6091695, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.3931235,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 6.0975555;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 7.2184335, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 6.1797732, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 7.3828194;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3026406, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.0868340, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 7.7929517.$$

Mercure et Uranus.

$$\alpha = \frac{a}{a^{\text{IV}}} = 0.02017895,$$
$$\log \alpha = 8.3048987;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3010743,$$
$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.3048766-,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3010695, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.3049857, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 6.4850112;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 6.6101641, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.3052950;$$
$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3014280, \qquad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 8.7823514.$$

Vénus et la Terre.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0.72333230,$$
$$\log \alpha = 9.85933789;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3563303,$$
$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.8275394-,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3777329, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.9742413, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.7222958,$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 9.5096850, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 9.3153736, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 9.1323110,$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 8.9562261, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 8.7860412, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 8.6204588,$$

$\log b_{\frac{1}{2}}^{(9)} = 8.4593472$, $\log b_{\frac{1}{2}}^{(10)} = 8.3034121$, $\log b_{\frac{1}{2}}^{(11)} = 8.1546614$,

$b_{\frac{1}{2}}^{(12)} = 8.0169498$, $b_{\frac{1}{2}}^{(13)} = 7.8968017$;

$\log a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{da} = 0.0751629$, $\log a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{da} = 0.2158253$, $\log a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{da} = 0.1752600$,

$a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{da} = 0.0995829$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{da} = 0.0077835$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{da} = 9.9061077$,

$a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{da} = 9.7974307$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{da} = 9.6846536$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da} = 9.5677588$,

$a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da} = 9.4469928$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da} = 9.3214962$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da} = 9.1892095$,

$a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da} = 9.0452482$, $a \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da} = 8.8784874$;

$\log a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{da^2} = 0.6062888$, $\log a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{da^2} = 0.5955340$, $\log a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{da^2} = 0.6510782$,

$a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{da^2} = 0.6783146$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{da^2} = 0.6780702$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{da^2} = 0.6548893$,

$a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{da^2} = 0.6131433$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{da^2} = 0.5610666$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{da^2} = 0.4991904$,

$a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(9)}}{da^2} = 0.4311184$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(10)}}{da^2} = 0.3586043$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(11)}}{da^2} = 0.2851098$,

$a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(12)}}{da^2} = 0.2154436$, $a^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(13)}}{da^2} = 0.1563565$;

$\log a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{da^3} = 1.3304720$, $\log a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{da^3} = 1.3366017$, $\log a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{da^3} = 1.3429093$,

$a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{da^3} = 1.3765018$, $a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{da^3} = 1.3996850$, $a^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{da^3} = 1.4264694$,

$\log a^3\dfrac{d^3b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.4324792$; $\log a^3\dfrac{d^3b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.4255955$, $\log a^3\dfrac{d^3b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.4065313$,

$a^3\dfrac{d^3b^{(9)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.3774766$, $a^3\dfrac{d^3b^{(10)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.3350068$, $a^3\dfrac{d^3b^{(11)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.2786114$,

$a^3\dfrac{d^3b^{(12)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.2035273$, $a^3\dfrac{d^3b^{(13)}_{\frac{1}{2}}}{da^3}=1.0972706$;

$\log a^4\dfrac{d^4b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2.3476455$, $\log a^4\dfrac{d^4b^{(9)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2.3559663$, $\log a^4\dfrac{d^4b^{(10)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2,3614438$,

$a^4\dfrac{d^4b^{(11)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2.3630342$, $a^4\dfrac{d^4b^{(12)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2.3675223$, $a^4\dfrac{d^4b^{(13)}_{\frac{1}{2}}}{da^4}=2.3829416$;

$\log a^5\dfrac{d^5b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.3411764$, $\log a^5\dfrac{d^5b^{(9)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.3461468$, $\log a^5\dfrac{d^5b^{(10)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.3504344$,

$a^5\dfrac{d^5b^{(11)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.3437304$, $a^5\dfrac{d^5b^{(12)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.3069397$, $a^5\dfrac{d^5b^{(13)}_{\frac{1}{2}}}{da^5}=3.1651758$;

$\log b^{(0)}_{\frac{3}{2}}=0.9996759$, $\log b^{(1)}_{\frac{3}{2}}=0.9480163$, $\log b^{(2)}_{\frac{3}{2}}=0.8684434$,

$b^{(3)}_{\frac{3}{2}}=0.7748044$, $b^{(4)}_{\frac{3}{2}}=0.6724969$, $b^{(5)}_{\frac{3}{2}}=0.5625368$,

$b^{(6)}_{\frac{3}{2}}=0.4503606$, $b^{(7)}_{\frac{3}{2}}=0.3339489$,..... $b^{(9)}_{\frac{3}{2}}=0.0915573$,

$b^{(10)}_{\frac{3}{2}}=9.9645463$, $b^{(11)}_{\frac{3}{2}}=9.8315159$, $b^{(12)}_{\frac{3}{2}}=9.6838249$;

$\log a\dfrac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{da}=1.6125716$, $\log a\dfrac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{da}=1.5660804$, $\log a\dfrac{db^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d}$[illegible].5030497,

$a\dfrac{db^{(9)}_{\frac{3}{2}}}{da}=1.1983763$, $a\dfrac{db^{(10)}_{\frac{3}{2}}}{da}=1.1112802$, $a\dfrac{db_{\frac{3}{2}}}{da}=1.0232209$,

$a\dfrac{db^{(12)}_{\frac{3}{2}}}{da}=0.9373535$;

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{d\alpha^2} = 2.3018050, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{d\alpha^2} = 2.2390607, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{d\alpha^2} = 2.1693413,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{d\alpha^2} = 2.0910117;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{d\alpha^3} = 3.4354241, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{d\alpha^3} = 3.3994095, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{d\alpha^3} = 3.3595318,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{d\alpha^3} = 3.3183228;$$

$$\log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{d\alpha^4} = 4.6037529, \quad \log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{d\alpha^4} = 4.5802831, \quad \log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{d\alpha^4} = 4.5520007,$$

$$\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{d\alpha^4} = 4.5158610;$$

$$\log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(9)}}{d\alpha^5} = 5.8220242, \quad \log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(10)}}{d\alpha^5} = 5.8137304, \quad \log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(11)}}{d\alpha^5} = 5.7950759,$$

$$\alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{3}{2}}^{(12)}}{d\alpha^5} = 5.7860966;$$

$$\log b_{\frac{5}{2}}^{(10)} = 1.3010137, \quad \log b_{\frac{5}{2}}^{(11)} = 1.2087995, \quad \log b_{\frac{5}{2}}^{(12)} = 1.1179669,$$

$$\log \alpha \frac{d b_{\frac{5}{2}}^{(12)}}{d\alpha} = 2.5205528, \quad \log \alpha \frac{d b_{\frac{5}{2}}^{(11)}}{d\alpha} = 2.3701862.$$

Vénus et Mars.

$$\alpha = \frac{a'}{a''} = 0.47472320,$$

$$\log \alpha = 9.67644048;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3251803,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.6636491 -,$$

ensuite

$$\log b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 0.3283118,\quad \log b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 9.7173577,\quad \log b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 9.2735244,$$

$$b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 8.8731782,\qquad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 8.4931373,\qquad b^{(5)}_{\frac{1}{2}} = 8.1250582,$$

$$b^{(6)}_{\frac{1}{2}} = 7.7655941,\qquad b^{(7)}_{\frac{1}{2}} = 7.4158072,$$

$$\log \alpha \frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.4769871,\ \log \alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.8005472,\ \log \alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.6229451,$$

$$\alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.3848411,\qquad \alpha \frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.1220478,\qquad \alpha \frac{db^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.8455446;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.6938757,\ \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.6119576,\ \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.7993520,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.7725917,\qquad \alpha^2 \frac{d^2b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.6548717;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = 9.9132326,\ \log \alpha^3 \frac{d^3b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = 9.9565147,\ \log \alpha^3 \frac{d^3b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = 9.9419027,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} = 0.0572876;$$

$$\log b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = 0.5469831,\quad \log b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = 0.3625732,\quad \log b^{(2)}_{\frac{3}{2}} = 0.1225303,$$

$$b^{(3)}_{\frac{3}{2}} = 9.8589503,\qquad b^{(4)}_{\frac{3}{2}} = 9.5822293;$$

$$\log \alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = 0.6045910.$$

Vénus et Jupiter.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{\text{IV}}} = 0.13907116,$$

$$\log \alpha = 9.14323716;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 0.3031275,$$

$$\log b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = 9.1421836-,$$

ensuite

$$\log b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 0.3031481,\quad \log b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 9.1464133,\quad \log b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 8.1650365,$$

$$b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 7.2292765,\quad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 6.3144992,\quad b^{(5)}_{\frac{1}{2}} = 5.4116197,$$

$$\log \alpha\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.2960146,\ \log \alpha\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.1527757,\ \log \alpha\frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.4696673,$$

$$\alpha\frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 7.7088843,\quad \alpha\frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 6.9293712\,;$$

$$\log\alpha^2\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.3148553,\ \log\alpha^2\frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 7.7995187,\ \log\alpha^2\frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.4838072,$$

$$\alpha^2\frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 8.0139749\,;$$

$$\log b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = 0.3200913,\quad \log b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = 9.6362687,\quad \log b^{(2)}_{\frac{3}{2}} = 8.8753738,$$

Vénus et Saturne.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{v}} = 0.07583790,$$

$$\log \alpha = 8.8798865\,;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 0.3016543,$$

$$\log b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = 8.8795737\ -,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3016563,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.8808250,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.6357350,$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 6.4116197,\qquad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 5.2552484,$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 7.7625875,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.8826960,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.9378074,$$
$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 6.9246219;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 7.7682152,\ \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 6.9965872,\ \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 7.9120461;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3066643,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.3617050,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 8.3382772.$$

Vénus et Uranus.

$$\alpha = \frac{a'}{a^{\text{vi}}} = 0.03770634,$$
$$\log \alpha = 8.5764145;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3011843,$$
$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.5763374-,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3011846,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.5766292,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.0282051,$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 5.5251234;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.4317458,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.5767744,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.3294917;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3024203,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.0546947.$$

La Terre et Mars.

$$\alpha = \frac{a''}{a'''} = 0.65630030,$$

$$\log \alpha = 9.8171026;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3467287,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.7915101-,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3600501, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.9055600, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.6080808,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 9.3514059, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 9.1138531, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 8.8874485,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 8.6683393, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 8.4545400, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 8.2446482;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 9.9063286, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 0.0912253, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0.0215552,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 9.9108710, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 9.7812253, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 9.6407118,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 9.4928278, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 9.3401255;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 0.3318798, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 0.3104113, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 0.3924441,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 0.4165244, \quad \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 0.3958687, \quad \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 0.3453367,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 0.2768718;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 0.9142147, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.9253683, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 0.9311491,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 0.9736713, \quad \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 1.0114648, \quad \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 1.0223067;$$

$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.8360921$, $\log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.7579948$, $\log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0.6438996$,
$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0.5126796$, $b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 0.3712996$, $b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 0.2231501$;

$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 1.3196526$, $\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 1.3258052$, $\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 1.2219588$,
$\alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0.9295514$.

La Terre et Jupiter.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{\text{iv}}} = 0.19226461,$$

$$\log \alpha = 9.2838993;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3050344,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.2818785 -,$$

et par suite

$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3051118$, $\log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.2900413$, $\log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 8.4501721$,
$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 7.6547155$, $b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 6.8913144$, $b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 6.1189258$,
$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 5.3577377$;

$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.5861991$, $\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.3022686$, $\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 8.7581084$,
$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 8.1347415$, $\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 7.4979214$, $\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 6.8215043$;

$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 8.6217811$, $\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 8.2363382$, $\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 8.7796309$,
$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 8.4409336$;

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 8.0198163, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8.3103335, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 8.0036273;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3377508, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.7917348, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 9.1708424,$$
$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 8.5110675.$$

La Terre et Saturne.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{v}} = 0.10484520,$$
$$\log \alpha = 9.0205486;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3022228,$$
$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.0199505 -,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3022303, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.0223583, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.9181510,$$
$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 6.8596126, \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 5.8201358;$$

$$\log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.0474891, \quad \log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.0259592, \quad \log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 8.2211887,$$
$$\alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 7.3967422;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 8.0572429, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 7.4323728, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 7.2247379;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3118236, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.5066998, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 8.6230114.$$

La Terre et Uranus.

$$\alpha = \frac{a''}{a^{\text{IV}}} = 0.05212866,$$
$$\log \alpha = 8.7170766;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3013241,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.7169291,$$

et ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3013244, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.7175166, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.3096302,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 5.9471101;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 7.4354786, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.7184035, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.6116640.$$

Mars et Jupiter.

$$\alpha = \frac{a^{\text{IV}}}{a^{\text{v}}} = 0.29295212,$$

$$\log \alpha = 0.18289741;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3102993,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.4620606 -,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3107170, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.4813308, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 8.8248545,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.2137037, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 7.6276730, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 7.1027766,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 6.9018398, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 5.9084314;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.9773471, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.5105510, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.1423157,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 8.7025675, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 8.2333583, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 7.7514147,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 7.2573000;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 9.0602959,\ \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 8.8337185,\ \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 9.2057921,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 9.0335699,\quad \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 8.7282097\,;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 8.8007200,\ \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8.9775623,\ \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 8.8643845,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 9.1384314\,;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3882367,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.0171193,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 9.5759876,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 9.1070131\,;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0.0093919,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 0.1485262,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.9434603.$$

Mars et Saturne.

$$\alpha = \frac{a^{♂}}{a^{♄}} = 0.15975187,$$

$$\log \alpha = 9.20344597\,;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3037965,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.2020538 -,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3038319,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.2076487,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 8.2866136,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 7.4111144,\qquad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 6.5566643,\qquad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 6.7144136\,;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.4195143,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.2160695,\ \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 8.5923320,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 7.8913315,\qquad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 7.1607899\,;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 8.4443563, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 7.9858999, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 8.6089574,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 8.1997561;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 7.6819807, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8.0347131;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3262509, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.7016295, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 9.0005902.$$

Mars et Uranus.

$$\alpha = \frac{a'''}{a^{\mathrm{vi}}} = 0.07942807,$$

$$\log \alpha = 8.89997400;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3017148,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.8996311,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3017171, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 8.9010058, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 7.6763277,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 6.4969296, \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 5.3377840;$$

$$\log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 7.8030385, \quad \log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 8.9030654, \quad \log \alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 7.9785106,$$

$$\alpha \frac{d b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 6.9785023.$$

Jupiter et Saturne.

$$\alpha = \frac{a^{\mathrm{iv}}}{a^{\mathrm{v}}} = 0.54531725,$$

$$\log \alpha = 9.73664929;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 0.3327780,$$

$$\log b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = 9.7195076 -,$$

et par suite

$$\log b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 0.3385031, \quad \log b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 9.7928402, \quad \log b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 9.4110097,$$

$$b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 9.0717902, \quad b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 8.7524495, \quad b^{(5)}_{\frac{1}{2}} = 8.4446069,$$

$$b^{(6)}_{\frac{1}{2}} = 8.1440915, \quad b^{(7)}_{\frac{1}{2}} = 7.8480721, \quad b^{(8)}_{\frac{1}{2}} = 7.5543316,$$

$$b^{(9)}_{\frac{1}{2}} = 7.2566214, \quad b^{(10)}_{\frac{1}{2}} = 6.9361113, \quad b^{(11)}_{\frac{1}{2}} = 6.5082603;$$

$$\log \alpha \frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.6444847, \quad \log \alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.9078356, \quad \log \alpha \frac{db^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.7800748,$$

$$\alpha \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.5979148, \quad \alpha \frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.3930207, \quad \alpha \frac{db^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 9.1755349,$$

$$\alpha \frac{db^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.9501831, \quad \alpha \frac{db^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.7190065, \quad \alpha \frac{db^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.4861615,$$

$$\alpha \frac{db^{(9)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.2562542, \quad \alpha \frac{db^{(10)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = 8.0433959;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.9319711, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.8803134, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 0.0199695.$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 0.0215187, \quad \alpha^2 \frac{d^2b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.9497892, \quad \alpha^2 \frac{d^2b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.8354851.$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.6946048, \quad \alpha^2 \frac{d^2b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.5318879, \quad \alpha^2 \frac{d^2b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.3544566$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b^{(9)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = 9.1591612;$$

$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 0.2937600$, $\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.3198235$, $\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 0.3182101$,

$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 0.3990127$, $\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 0.4418800$, $\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 0.4315040$,

$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 0.3848435$, $\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^3} = 0.2975474$, $\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(8)}}{d\alpha^3} = 0.1906973$;

$\log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^4} = 0.8729478$, $\log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^4} = 0.8706088$, $\log \alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^4} = 0.8873249$,

$\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^4} = 0.9001709$, $\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^4} = 0.9525534$, $\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^4} = 1.0017224$;

$\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^4} = 1.0209232$, $\alpha^4 \frac{d^4 b_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha^4} = 1.0109005$;

$\log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^5} = 1.5568463$, $\log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^5} = 1.5602820$, $\log \alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^5} = 1.5651120$,

$\alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^5} = 1.5786049$, $\alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^5} = 1.5966258$, $\alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^5} = 1.6299468$,

$\alpha^5 \frac{d^5 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^5} = 1.6433842$;

$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.6393258$, $\log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.5031767$, $\log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0.3185080$,

$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 0.1124955$, $b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 9.8943626$, $b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 9.6684299$,

$b_{\frac{3}{2}}^{(6)} = 9.4371619$, $b_{\frac{3}{2}}^{(7)} = 9.2008490$, $b_{\frac{3}{2}}^{(8)} = 8.9651546$,

$b_{\frac{3}{2}}^{(9)} = 8.7317660$;

$\log \alpha \frac{d b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 0.9034145$, $\log \alpha \frac{d b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 0.9196246$, $\log \alpha \frac{d b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0.8642731$,

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0.7618983,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0.6288690,\quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 0.4746682,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 0.3060282,\quad \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 0.1215541,\quad \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(8)}}{d\alpha} = 9.9308850;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 1.4586594,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 1.4506427,\quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 1.4426810,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 1.4123291,\quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 1.3488292,\quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 1.2593505,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 1.1498259,\quad \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(7)}}{d\alpha^2} = 1.0264963;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 2.1290567,\quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 2.1291087,\quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 2.1184890,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 2.1051414,\quad \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 2.0795771,\quad \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 2.0336882,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3} = 1.9695490.$$

Jupiter et Uranus.

$$\alpha = \frac{a^{\text{v}}}{a^{\text{vi}}} = 0.27112980,$$

$$\log \alpha = 9.43317732;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3089757,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.4291303 -,$$

et par suite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3092807,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.4455513,\quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 8.7551581,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.1098821,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 7.4854233,\quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 6.8721563,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 6.2678754;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 8.9036025, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.4704249, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.0702966,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 8.5957359, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 8.0952766, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 7.6209882,$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 8.9747281, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 8.7206193, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 9.1253392,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 8.9207991\,;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 8.6763224, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 8.8447846, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 8.7348045\,;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.3752946, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 9.9725705, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.4985660,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.9967743.$$

Saturne et Uranus.

$$\alpha = \frac{a^{\text{v}}}{a^{\text{vi}}} = 0.49719638,$$

$$\log \alpha = 9.69652803\,;$$

d'où l'on a conclu

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3274903,$$

$$\log b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.6824310\,-,$$

ensuite

$$\log b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 0.3313139, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 9.7419446, \quad \log b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 9.3187163,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 8.9386898, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 8.5787423, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(5)} = 8.2301934,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(6)} = 7.8880671, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(7)} = 7.5467272, \quad b_{\frac{1}{2}}^{(8)} = 7.1894903\,;$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha} = 9.5309837, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha} = 9.8344534, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 9.6738528,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 9.4546038, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 9.2113386, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha} = 8.9550935,$$

$$\alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha} = 8.6912805, \quad \alpha \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(7)}}{d\alpha} = 8.4260330;$$

$$\log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^2} = 9.7691040, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^2} = 9.6979272, \quad \log \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^2} = 9.8690532,$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} = 9.8526322, \quad \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} = 9.7506245, \quad \alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2} = 9.6016237;$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{1}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2} = 9.4213955;$$

$$\log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{d\alpha^3} = 0.0340173, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{d\alpha^3} = 0.0708710, \quad \log \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{d\alpha^3} = 0.0638863,$$

$$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3} = 0.1652822, \quad \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3} = 0.2031493, \quad \alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{1}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3} = 0.1736498;$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(0)} = 0.5741361, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(1)} = 0.4061981, \quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)} = 0.1848201,$$

$$b_{\frac{3}{2}}^{(3)} = 9.9405688, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(4)} = 9.6835549, \quad b_{\frac{3}{2}}^{(5)} = 9.4185433,$$

$$\log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(2)}}{d\alpha} = 0.6858247, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(3)}}{d\alpha} = 0.5563247, \quad \log \alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha} = 0.3911789,$$

CHAPITRE XI.

Expressions numériques des variations séculaires des élémens elliptiques des orbites planétaires.

90. Nous nous occuperons dans ce chapitre et dans les suivans de déterminer les valeurs numériques des inégalités des planètes résultantes de leurs attractions mutuelles. Nous commencerons par les variations séculaires. Dans le chapitre VIII du livre II, nous avons donné l'expression analytique des inégalités de ce genre qui affectent chacun des élémens des orbites planétaires; nous allons maintenant réduire ces formules en nombres. Pour cela, il faut d'abord calculer les valeurs des quantités que nous avons désignées par $[a, a']$, $\boxed{\overline{a, a'}}$, etc., $\left(\overline{a, a'}\right)_1$, $\left(\overline{a, a'}\right)_2$, etc. On a d'abord déterminé les valeurs de $[a, a']$, $\boxed{\overline{a, a'}}$, au moyen des formules du n° 63 du livre II, dans lesquelles on a substitué, à la place de (a, a'), $(a, a')'$, leurs valeurs en fonction des quantités $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, qui ont été calculées précédemment. En effet, en comparant les développemens des fonctions $(a^2 - 2aa' \cos \varphi + a'^2)^{\frac{1}{2}}$ et $(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on a

$$(a, a') = \frac{1}{2} a' b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}, \qquad (a, a')' = a' b^{(1)}_{-\frac{1}{2}};$$

on trouvera ainsi

$$[a, a'] = -\frac{3m'na^2 b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4(1-a^2)^2},$$

$$\boxed{a, a'} = -\frac{3m'na\left[(1+a^2)\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}\right]}{2(1-a^2)^2}.$$

Lorsque les quantités $[a, a']$ et $\boxed{a, a'}$ seront déterminées, on en conclura les valeurs de $[a', a]$ et $\boxed{a', a}$ au moyen des équations suivantes, données n°s 65 et 69, livre II,

$$[a', a] = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} [a, a'], \quad \boxed{a', a} = \frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}} \boxed{a, a'}.$$

On pourrait d'ailleurs calculer directement les quantités $[a, a']$ et $\boxed{a, a'}$ par les formules suivantes, n°s 53 et 63, livre II,

$$[a, a'] = -\frac{m'n}{2} \left(a^2 \frac{dA^{(0)}}{da} + \frac{1}{2} a^3 \frac{d^2A^{(2)}}{da^2} \right),$$

$$\boxed{a, a'} = -\frac{m'n}{2} \left(aA^{(1)} - a^2 \frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{1}{2} a^3 \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} \right).$$

En substituant à la place de $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ et de leurs différences leurs valeurs en fonction des $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ et de leurs différences, quantités dont nous avons donné les expressions numériques dans le chapitre précédent, les fonctions $[a, a']$ et $\boxed{a, a'}$ se trouveront exprimées au moyen de quantités connues.

Si dans les formules du n° 74 du livre II on substituait de même à la place de (a, a') et de $(a, a')'$

leurs valeurs précédentes, on exprimerait également les quantités $(\overline{a, a'})$, $(\overline{a, a'})_1$, etc., en fonction de $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$; mais il est plus simple, pour les calculs numériques, d'exprimer ces valeurs en fonction des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, etc. En négligeant les puissances des excentricités supérieures à la seconde, on a, n° 74, livre II,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{2} ane \frac{dF}{de} - 2a^2 n \frac{dF}{da}.$$

On a, n° 53, livre II,

$$F = \frac{m'}{2} A^{(0)} + \frac{m'}{8} \left(2a \frac{dA^{(0)}}{da} + a^2 \frac{d^2 A^{(0)}}{da^2}\right) [e^2 + e'^2 - (p' - p)^2 - (q' - q)^2]$$
$$+ \frac{m'}{2} \left(A^{(1)} - a \frac{dA^{(1)}}{da} - \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2 A^{(1)}}{da^2}\right) ee' \cos(\varpi' - \varpi).$$

La fonction $(p' - p^2) + (q' - q)^2$ est le carré de l'inclinaison de l'orbite de m' sur celle de m; cette inclinaison est constante lorsqu'on ne considère que l'action mutuelle de ces deux planètes : sa variation est donc nulle, et cette fonction ne produit, par conséquent, dans l'expression de $\delta\epsilon$, que des termes proportionnels au temps t, que l'on peut négliger puisqu'ils se confondent avec le moyen mouvement dans l'expression de la longitude moyenne. En substituant donc pour $\frac{dF}{de}$ et $\frac{dF}{da}$ leurs valeurs dans $\frac{d\epsilon}{dt}$, on aura, comme dans le n° 74 du livre II,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = (\overline{a, a'})_0 + (\overline{a, a'})_1 e^2 + (\overline{a, a'})_2 e'^2 - (\overline{a, a'})_3 ee' \cos(\varpi' - \varpi). \qquad (p)$$

En supposant ici

$$(\overline{a,a'})_0 = -m'na^2 \frac{dA^{(0)}}{da},$$

$$(\overline{a,a'})_1 = -\frac{m'n}{8}\left(2a^2 \frac{dA^{(0)}}{da} + 7a^3 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2} + 2a^4 \frac{d^3A^{(0)}}{da^3}\right),$$

$$(\overline{a,a'})_2 = -\frac{m'n}{4}\left(2a^2 \frac{dA^{(0)}}{da} + 4a^3 \frac{d^2A^{(0)}}{da^2} + a^4 \frac{d^3A^{(0)}}{da^3}\right),$$

$$(\overline{a,a'})_3 = -\frac{m'n}{8}\left(2aA^{(1)} - 2a^2 \frac{dA^{(1)}}{da} + 15a^3 \frac{d^2A^{(1)}}{da^2} + 4a^4 \frac{d^3A^{(1)}}{da^3}\right).$$

Si l'on substitue dans ces expressions, à la place de $A^{(1)}$, $\frac{dA^{(0)}}{da}$, $\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}$, etc., leurs valeurs n° 24, elles se trouveront exprimées en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, et de leurs différences relatives à α.

Au moyen de ces formules et des valeurs numériques rapportées dans le chapitre précédent, on a trouvé les résultats suivans, dans lesquels $(1+\mu)$, $(1+\mu')$, etc., sont des coefficiens indéterminés, par lesquels on a multiplié respectivement les masses de Mercure, Vénus, etc., que nous avons adoptées, afin de pouvoir corriger immédiatement ces résultats à mesure que les observations feront connaître plus exactement les valeurs des masses planétaires.

$[a, a'] = (1+\mu')\ 2'',910335,$ $\qquad \boxed{a, a'} = (1+\mu')\ 1'',870086,$

$[a, a''] = (1+\mu'')\ 0'',891538,$ $\qquad \boxed{a, a''} = (1+\mu'')\ 0'',422908,$

$[a, a'''] = (1+\mu''')\ 0'',027984,$ $\qquad \boxed{a, a'''} = (1+\mu''')\ 0'',008814,$

$[a, a^{\text{iv}}] = (1+\mu^{\text{iv}})\ 1'',595153,$ $\qquad \boxed{a, a^{\text{iv}}} = (1+\mu^{\text{iv}})\ 0'',148157,$

$[a, a^{\text{v}}] = (1+\mu^{\text{v}})\ 0'',077059,$ $\qquad \boxed{a, a^{\text{v}}} = (1+\mu^{\text{v}})\ 0'',003908,$

$[a, a^{\text{vi}}] = (1+\mu^{\text{vi}})\ 0'',001852,$ $\qquad \boxed{a, a^{\text{vi}}} = (1+\mu^{\text{vi}})\ 0'',000045,$

$[a', a] = (1 + \mu)\, 0'',447993, \qquad \boxed{a', a} = (1 + \mu)\, 0'',287865,$

$[a', a''] = (1 + \mu'')\, 6'',860112, \qquad \boxed{a', a''} = (1 + \mu'')\, 5'',711900,$

$[a', a'''] = (1 + \mu''')\, 0'',102048, \qquad \boxed{a', a'''} = (1 + \mu''')\, 0'',058717,$

$[a', a^{iv}] = (1 + \mu^{iv})\, 4'',182773, \qquad \boxed{a', a^{iv}} = (1 + \mu^{iv})\, 0'',725377,$

$[a', a^{v}] = (1 + \mu^{v})\, 0'',198360, \qquad \boxed{a', a^{v}} = (1 + \mu^{v})\, 0'',018788,$

$[a', a^{vi}] = (1 + \mu^{vi})\, 0'',004740, \qquad \boxed{a', a^{vi}} = (1 + \mu^{vi})\, 0'',000224,$

$[a'', a] = (1 + \mu)\, 0'',103506, \qquad \boxed{a'', a} = (1 + \mu)\, 0'',049099,$

$[a'', a'] = (1 + \mu')\, 5'',174037, \qquad \boxed{a'', a'} = (1 + \mu')\, 4'',308027,$

$[a'', a'''] = (1 + \mu''')\, 0'',298228, \qquad \boxed{a'', a'''} = (1 + \mu''')\, 0'',229326,$

$[a'', a^{iv}] = (1 + \mu^{iv})\, 7'',034655, \qquad \boxed{a'', a^{iv}} = (1 + \mu^{iv})\, 1'',682798,$

$[a'', a^{v}] = (1 + \mu^{v})\, 0'',325649, \qquad \boxed{a'', a^{v}} = (1 + \mu^{v})\, 0'',042580,$

$[a'', a^{vi}] = (1 + \mu^{vi})\, 0'',007723, \qquad \boxed{a'', a^{vi}} = (1 + \mu^{vi})\, 0'',000504,$

$[a''', a] = (1 + \mu)\, 0'',019797, \qquad \boxed{a''', a} = (1 + \mu)\, 0'',006235,$

$[a''', a'] = (1 + \mu')\, 0'',468978, \qquad \boxed{a''', a'} = (1 + \mu')\, 0'',269851,$

$[a''', a''] = (1 + \mu'')\, 1'',817218, \qquad \boxed{a''', a''} = (1 + \mu'')\, 1'',397369,$

$[a''', a^{iv}] = (1 + \mu^{iv})\, 14'',591324, \qquad \boxed{a''', a^{iv}} = (1 + \mu^{iv})\, 5'',284290,$

$[a''', a^{v}] = (1 + \mu^{v})\, 0'',629736, \qquad \boxed{a''', a^{v}} = (1 + \mu^{v})\, 0'',125346,$

$[a''', a^{vi}] = (1 + \mu^{vi})\, 0'',014625, \qquad \boxed{a''', a^{vi}} = (1 + \mu^{vi})\, 0'',001451,$

$[a^{iv}, a] = (1 + \mu)\, 0'',000240, \qquad \boxed{a^{iv}, a} = (1 + \mu)\, 0'',000022,$

$[a^{iv}, a'] = (1 + \mu')\, 0'',004091, \qquad \boxed{a^{iv}, a'} = (1 + \mu')\, 0'',000709,$

$[a^{iv}, a''] = (1 + \mu'')\, 0'',009123, \qquad \boxed{a^{iv}, a''} = (1 + \mu'')\, 0'',002182,$

$[a^{iv}, a'''] = (1 + \mu''')\, 0'',003105, \qquad \boxed{a^{iv}, a'''} = (1 + \mu''')\, 0'',001125,$

$[a^{iv}, a^{v}] = (1 + \mu^{v})\, 7'',367280, \qquad \boxed{a^{iv}, a^{v}} = (1 + \mu^{iv})\, 4'',815454,$

$[a^{iv}, a^{vi}] = (1 + \mu^{vi})\, 0'',105202, \qquad \boxed{a^{iv}, a^{vi}} = (1 + u^{vi})\, 0'',035319,$

$[a^{\mathrm{v}}, a] = (1 + \mu)\, 0'',000029,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a} = (1 + \mu)\, 0'',000001,$

$[a^{\mathrm{v}}, a'] = (1 + \mu')\, 0'',000477,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a'} = (1 + \mu')\, 0'',000045,$

$[a^{\mathrm{v}}, a''] = (1 + \mu'')\, 0'',001039,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a''} = (1 + \mu'')\, 0'',000136,$

$[a^{\mathrm{v}}, a'''] = (1 + \mu''')\, 0'',000330,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a'''} = (1 + \mu''')\, 0'',000066,$

$[a^{\mathrm{v}}, a^{\mathrm{iv}}] = (1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 18'',129129,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a^{\mathrm{iv}}} = (1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 11'',849695,$

$[a^{\mathrm{v}}, a^{\mathrm{vi}}] = (1 + \mu^{\mathrm{vi}})\, 0'',386656,$ $\boxed{a^{\mathrm{v}}, a^{\mathrm{vi}}} = (1 + \mu^{\mathrm{vi}})\, 0'',232241,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a] = (1 + \mu)\, 0'',000002,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a} = (1 + \mu)\, 0'',000000,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a'] = (1 + \mu')\, 0'',000041,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a'} = (1 + \mu')\, 0'',000000,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a''] = (1 + \mu'')\, 0'',000089,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a''} = (1 + \mu'')\, 0'',000001,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a'''] = (1 + \mu''')\, 0'',000028,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a'''} = (1 + \mu''')\, 0'',000003,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a^{\mathrm{iv}}] = (1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 0'',931305,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a^{\mathrm{iv}}} = (1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 0'',312661,$

$[a^{\mathrm{vi}}, a^{\mathrm{v}}] = (1 + \mu^{\mathrm{v}})\, 1'',390990,$ $\boxed{a^{\mathrm{vi}}, a^{\mathrm{v}}} = (1 + \mu^{\mathrm{v}})\, 0'',835482.$

91. A l'aide de ces valeurs et des formules du chapitre VIII du livre II, on a obtenu les résultats suivans, dans lesquels $\frac{d\omega}{dt}$ représente le mouvement sidéral en longitude du périhélie à l'époque de 1800 et pendant une année julienne de $365^j,25$; $\frac{de}{dt}$ est la variation de l'excentricité à la même époque et pendant le même intervalle; $\frac{d\varphi}{dt}$ est la variation annuelle de l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique fixe de 1800, $\frac{d\varphi_{\prime}}{dt}$ la variation annuelle de cette même inclinaison à l'écliptique vraie; $\frac{d\alpha}{dt}$ est le mouvement annuel et sidéral du nœud ascendant de l'orbite sur l'écliptique fixe de 1800, et $\frac{d\alpha_{\prime}}{dt}$ le mouvement annuel et sidéral du même nœud sur l'écliptique vraie. Enfin, comme nous l'avons dit, μ, μ', etc., repré-

sentent les corrections dont sont encore susceptibles les masses planétaires, ces coefficiens devant être supposés égaux à zéro jusqu'à ce que le temps et les observations attentives des mouvemens planétaires aient permis de les déterminer avec exactitude.

Mercure.

$$\frac{d\varpi}{dt} = 4'',815146 + 2'',874008\mu' + 0'',257471\mu'' + 0'',028814\mu''' + 1'',579518\mu^{\text{IV}} + 0'',076027\mu^{\text{V}} + 0'',001853\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{de}{dt} = 0'',006327 + 0'',010417\mu' + 0'',003028\mu'' - 0'',000805\mu''' - 0'',006371\mu^{\text{IV}} + 0'',000056\mu^{\text{V}} + 0'',000002\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -0'',115528 - 0'',083394\mu' - 0'',000032\mu' - 0'',029026\mu^{\text{IV}} - 0'',003065\mu^{\text{V}} - 0'',000011\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -4'',206625 - 1'',681272\mu' - 1'',022435\mu'' - 0'',020690\mu'' - 1'',413623\mu^{\text{IV}} - 0'',066934\mu^{\text{V}} - 0'',001671\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\varphi_{,}}{dt} = +0'',174077 + 0'',064865\mu' + 0'',000309\mu''' + 0'',098978\mu^{\text{IV}} + 0'',009889\mu^{\text{V}} + 0'',000036\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\alpha_{,}}{dt} = -6'',686635 - 0'',103506\mu - 3'',866319\mu' - 0'',288868\mu'' - 0'',098428\mu''' - 2'',214139\mu^{\text{IV}} - 0'',112948\mu^{\text{V}} - 0'',002427\mu^{\text{VI}}.$$

Vénus.

$$\frac{d\varpi'}{dt} = -1'',956172 - 4'',020954\mu - 5'',397788\mu'' + 0'',834282\mu''' + 6'',544997\mu^{\text{IV}} + 0'',079738\mu^{\text{V}} + 0'',003554\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{de'}{dt} = -0'',123569 - 0'',042732\mu - 0'',047014\mu'' - 0'',002199\mu''' - 0'',030959\mu^{\text{IV}} - 0'',000672\mu^{\text{V}} + 0'',000007\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = -0'',015468 + 0'',026607\mu + 0'',001478\mu''' - 0'',038349\mu^{\text{IV}} - 0'',005206\mu^{\text{V}} + 0'',000002\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -9'',331950 + 0'',364795\mu - 6'',860112\mu'' - 0'',052833\mu''' - 2'',698121\mu^{\text{IV}} - 0'',082018\mu^{\text{V}} - 0'',003661\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\varphi'_{,}}{dt} = +0'',047106 + 0'',020460\mu - 0'',002841\mu''' + 0'',026147\mu^{\text{IV}} + 0'',003341\mu^{\text{V}} - 0'',000001\mu^{\text{VI}},$$

$$\frac{d\alpha'_{,}}{dt} = -17'',527290 + 0'',177006\mu - 5'',174037\mu' - 6'',860112\mu'' - 0'',196657\mu''' - 5'',195033\mu^{IV} - 0'',273018\mu^{V} - 0'',005419\mu^{VI}.$$

La Terre.

$$\frac{d\varpi''}{dt} = 11'',174815 - 0'',438513\mu + 3'',645402\mu' + 0'',876611\mu''' + 6'',898014\mu^{IV} + 0'',186099\mu^{V} + 0'',007202\mu^{VI},$$

$$\frac{de''}{dt} = -0'',090338 - 0'',004286\mu + 0'',014419\mu' - 0'',019048\mu''' - 0'',081014\mu^{IV} - 0'',000429\mu^{V} + 0'',000022\mu^{VI}.$$

Mars.

$$\frac{d\varpi'''}{dt} = 15'',584561 + 0'',022645\mu + 0'',487132\mu' + 1'',932202\mu'' + 12'',463576\mu^{IV} + 0'',663681\mu^{V} + 0'',015325\mu^{VI},$$

$$\frac{de'''}{dt} = +0'',188466 + 0'',001254\mu + 0'',000742\mu' + 0'',020965\mu'' + 0'',159238\mu^{IV} + 0'',006285\mu^{V} - 0'',000018\mu^{VI}$$

$$\frac{d\varphi'''}{dt} = -0'',295246 + 0'',000087\mu - 0'',012561\mu' - 0'',258052\mu^{IV} - 0'',024637\mu^{V} - 0'',000083\mu^{VI},$$

$$\frac{d\alpha'''}{dt} = -9'',651975 + 0'',056054\mu + 0'',304830\mu' - 1'',817218\mu'' - 7'',933124\mu^{IV} - 0'',253479\mu^{V} - 0'',009038\mu^{VI},$$

$$\frac{d\varphi'''_{,}}{dt} = -0'',019925 - 0'',000367\mu + 0'',126020\mu' - 0'',133642\mu^{IV} - 0'',011897\mu^{V} - 0'',000039\mu^{VI},$$

$$\frac{d\alpha'''_{,}}{dt} = -22'',291408 - 0'',340523\mu - 8'',232278\mu' - 1'',817218\mu'' - 0'',298228\mu''' - 11'',143124\mu^{IV} - 0'',448049\mu^{V} - 0'',011988\mu^{VI}.$$

Jupiter.

$$\frac{d\varpi^{IV}}{dt} = 6'',352560 + 0'',000197\mu + 0'',004138\mu' + 0'',009101\mu'' + 0'',001405\mu''' + 6'',201200\mu^{V} + 0'',136519\mu^{VI},$$

$$\frac{de^{IV}}{dt} = 0'',265125 - 0'',000004\mu + 0'',000004\mu' + 0'',000037\mu'' - 0'',000066\mu''' + 0'',264494\mu^{V} + 0'',000660\mu^{VI}$$

$$\frac{d\varphi^{IV}}{dt} = -0'',074133 + 0'',000023\mu + 0'',000097\mu' + 0'',000077\mu''' - 0'',074940\mu^{V} + 0'',000610\mu^{VI},$$

$$\frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt} = 6'',177646 + 0'',000543\mu + 0'',005595\mu' - 0'',009123\mu'' - 0'',000342\mu''' + 6'',230267\mu^{\text{v}} - 0'',049294\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -\,0'',210803 - 0'',010034\mu - 0'',122419\mu' - 0'',007287\mu''' - 0'',071628\mu^{\text{v}} + 0'',000565\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{dx_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -14'',313783 - 0'',336150\mu - 12'',244061\mu' - 0'',009123\mu'' - 0'',265625\mu''' - 7'',034657\mu^{\text{iv}} + 5'',629230\mu^{\text{v}} - 0'',053398\mu^{\text{vi}}.$$

Saturne.

$$\frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt} = 16'',017572 + 0'',000024\mu + 0'',000473\mu' + 0'',000999\mu'' + 0'',000379\mu''' + 15'',667911\mu^{\text{iv}} + 0'',347786\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{de^{\text{v}}}{dt} = -\,0'',640259 - 0'',000000\mu + 0'',000000\mu' + 0'',000000\mu'' - 0'',000006\mu''' - 0'',650856\mu^{\text{iv}} + 0'',010603\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{d\varphi^{\text{v}}}{dt} = 0'',100463 + 0'',000003\mu + 0'',000017\mu' + 0'',000009\mu''' + 0'',097152\mu^{\text{iv}} + 0'',003282\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{dx^{\text{v}}}{dt} = -\,9'',137009 + 0'',000004\mu + 0'',000041\mu' - 0'',001039\mu'' - 0'',000223\mu''' - 8'',842369\mu^{\text{iv}} - 0'',293423\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{v}}}{dt} = -\,0'',142167 - 0'',011609\mu - 0'',184655\mu' - 0'',008573\mu''' + 0'',059454\mu^{\text{iv}} + 0'',003216\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{dx_{,}^{\text{v}}}{dt} = -18'',901323 - 0'',118841\mu - 5'',617953\mu' - 0'',001039\mu'' - 0'',096638\mu''' - 12'',445918\mu^{\text{iv}} - 0'',325649\mu^{\text{v}} - 0'',295285\mu^{\text{vi}}.$$

Uranus.

$$\frac{d\varpi^{\text{vi}}}{dt} = 2'',415526 + 0'',000002\mu + 0'',000041\mu' + 0'',000088\mu'' + 0'',000033\mu''' + 1'',227306\mu^{\text{iv}} + 1'',188056\mu^{\text{v}},$$

$$\frac{de^{\text{vi}}}{dt} = -\,0'',051982 - 0'',000000\mu - 0'',000000\mu' - 0'',000000\mu'' + 0'',000000\mu''' - 0'',006033\mu^{\text{iv}} - 0'',045949\mu^{\text{v}},$$

$$\frac{d\varphi^{\text{vi}}}{dt} = -\,0'',047261 + 0'',000000\mu + 0'',000000\mu' + 0'',000000\mu''' - 0'',009179\mu^{\text{iv}} - 0'',038082\mu^{\text{v}},$$

$$\frac{dx^{\text{vi}}}{dt} = 2'',596203 + 0'',000016\mu + 0'',000139\mu' - 0'',000089\mu'' + 0'',000032\mu''' + 0'',497753\mu^{\text{iv}} + 2'',098352\mu^{\text{v}},$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{vi}}}{dt} = 0'',031282 - 0'',005777\mu + 0'',010103\mu' - 0'',004035\mu''' + 0'',060158\mu^{\text{iv}} - 0'',029167\mu^{\text{v}},$$

$$\frac{d\alpha_{,}^{\text{vi}}}{dt} = -33'',197370 - 0'',838628\mu - 22'',693981\mu' - 0'',000089\mu'' - 0'',641336\mu''' - 10'',297065\mu^{\text{iv}} + 1'',281452\mu^{\text{v}} - 0'',007723\mu^{\text{vi}}.$$

Les formules précédentes ne renferment pas les variables qui déterminent les déplacemens de l'écliptique; pour éviter les diviseurs qui se réduiraient à zéro, il a fallu recourir aux formules (9) et (10) du n° 44, livre II. On a supposé ainsi

$$p'' = \text{tang}\,\varphi'' \sin\alpha'', \quad q'' = \text{tang}\,\varphi'' \cos\alpha'',$$

et l'on a déterminé les différences $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dq''}{dt}$ par les formules (c) du n° 69 du livre II. On a trouvé ainsi pour l'époque de 1800 :

$$\frac{dp''}{dt} = 0'',064960 + 0'',008838\mu + 0'',080017\mu' + 0'',006392\mu''' - 0'',023648\mu^{\text{iv}} - 0'',006670\mu^{\text{v}} + 0'',000031\mu^{\text{vi}},$$

$$\frac{dq''}{dt} = -0'',488566 - 0'',009139\mu - 0'',295991\mu' - 0'',007101\mu' - 0'',159672\mu^{\text{iv}} - 0'',016563\mu^{\text{v}} - 0'',000100\mu^{\text{vi}}.$$

On aura ensuite, en prenant pour plan fixe celui de l'écliptique de 1800, et en nommant t le nombre d'années juliennes écoulées depuis cette époque,

$$p'' = t\frac{dp''}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2p''}{dt^2},$$
$$q'' = t\frac{dq''}{dt} + \frac{t^2}{1.2}\frac{d^2q''}{dt^2}.$$

On pourra ne considérer que la première puissance du temps dans ces formules tant que t ne dépassera pas 300, et l'on pourra rejeter toutes les

puissances supérieures à la seconde lorsque t sera moindre que 1200; on le fait même relativement aux observations les plus anciennes qui nous soient parvenues, à cause de leur imperfection, p'' et q'' étant déterminés, on en déduira φ'' et α'' au moyen des équations précédentes, et l'on aura, par conséquent, la position de l'écliptique vraie par rapport à l'écliptique fixe.

92. Ce que nous disons ici relativement aux quantités p'' et q'' s'appliquerait également aux variations de l'excentricité et du périhélie de l'orbe terrestre, et à celles des éléments des autres planètes. Les formules précédentes suffisent donc, comme on l'a dit n° 64, livre II, aux besoins actuels de l'Astronomie; mais les progrès futurs de cette science et le désir de compléter sur ce point la théorie, exigeaient qu'on déterminât les variations séculaires des élémens des orbes planétaires par des formules qui pussent embrasser à la fois les siècles passés et les siècles à venir. Pour cela, il fallait appliquer au système solaire les formules des n°s 64 et 69 du livre II, et nous avons vu que c'était en effet le seul moyen de résoudre d'une manière rigoureuse l'importante question de sa stabilité. Les masses des planètes et les élémens de leurs orbites sont aujourd'hui assez bien connus pour permettre cette application; mais les calculs qu'elle exige, lorsque l'on considère à la fois les sept planètes principales, sont d'une extrême longueur: j'ai osé le premier entreprendre ce pénible travail, et voici les résultats auxquels je suis parvenu.

Au moyen des valeurs données n° 90, et des formules (q) du n° 64, livre II, on a formé les sept équations suivantes (*) :

$$\left.\begin{array}{l}
(h-5'',57620)M + 1'',87009M' + 0'',45719M'' + 0'',00881M''' + 0'',14816M^{\text{iv}} \\
\qquad + 0'',00391M^{\text{v}} + 0'',000005M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-12'',32652)M' + 0'',27137M + 6'',17497M'' + 0'',05872M''' + 0'',72538M^{\text{iv}} \\
\qquad + 0'',01879M^{\text{v}} + 0'',00022M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-12'',93787)M'' + 0'',04629M + 4'',30803M' + 0'',22933M''' + 1'',68280M^{\text{iv}} \\
\qquad + 0'',04258M^{\text{v}} + 0'',00050M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-17'',68788)M''' + 0'',00588M + 0'',26985M' + 1'',51065M'' + 5'',28429M^{\text{iv}} \\
\qquad + 0'',12535M^{\text{v}} + 0'',00145M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-7'',48977)M^{\text{iv}} + 0'',00002M + 0'',00071M' + 0'',00236M'' + 0'',00113M''' \\
\qquad + 4'',81545M^{\text{v}} + 0'',03532M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-18'',51775)M^{\text{v}} + 0'',00000M + 0'',00005M' + 0'',00015M'' + 0'',00007M''' \\
\qquad + 11'',84970M^{\text{iv}} + 0'',23224M^{\text{vi}} = 0, \\
(h-2'',32247)M^{\text{vi}} + 0'',00000M + 0'',00000M' + 0'',00000M'' + 0'',00000M''' \\
\qquad + 0'',31266M^{\text{iv}} + 0'',83548M^{\text{v}} = 0.
\end{array}\right\} (a)$$

On a éliminé de ces équations, par les procédés ordinaires, les coefficiens indéterminés M, M′, M″, etc., et l'on est parvenu à l'équation du septième degré qui suit :

$$\left.\begin{array}{l}
0,00471h^7 - 0,36188h^6 + 10,99112h^5 - 168,52411h^4 + 1390,39032h^3 \\
\quad - 6151,22555h^2 + 13516,36218h - 11380,38400 = 0.
\end{array}\right\} (b)$$

(*) Les valeurs des quantités $[a', a]$, $\boxed{a', a}$, $[a'', a]$, etc., $[a, a'']$, $\boxed{a, a''}$, $[a', a'']$, etc., employées dans ce calcul, supposent les masses de Mercure et de la Terre respectivement égales à $\frac{1}{2025810}$ et $\frac{1}{329630}$ qui sont les valeurs adoptées dans la *Mécanique céleste*. Comme les changemens qui en pourraient résulter dans le résultat final, seraient probablement insignifiants, nous n'avons pas cru devoir recommencer ce pénible calcul, pour y substituer les valeurs des masses de ces deux planètes auxquelles nous nous sommes arrêté, n° 87.

On a résolu cette équation par les méthodes d'approximation connues; et en nommant h_0, h_1, h_2, etc., ses racines, on a trouvé

$$\begin{array}{ll} h_0 = 3'',70686, & h_4 = 18'',48900, \\ h_1 = 22,26007, & h_5 = 17,11532, \\ h_2 = 7,63095, & h_6 = 2,25464. \\ h_3 = 5,37920, & \end{array}$$

Si l'on substitue successivement ces valeurs dans les équations (a) et qu'on élimine ensuite, on pourra exprimer six des coefficients indéterminés M, M′, M″, etc. en fonction de l'un d'entre eux, et chacune des racines h_0, h_1, h_2, etc., donnera ainsi un système particulier de ces quantités. Il faudra seulement avoir soin, pour éviter les fractions dont les dénominateurs seraient très petits et qui pourraient rendre les résultats entièrement fautifs, d'employer dans cette élimination la méthode des approximations successives, en écartant d'abord les termes dont les coefficients sont les moins considérables, pour y avoir égard dans une seconde approximation. On arrivera ainsi très aisément à des valeurs aussi exactes qu'on pourra le désirer; comme il y a une équation de plus qu'il n'est nécessaire pour effectuer l'élimination, il sera bon aussi de réunir en une seule les deux équations qui seraient affectées des plus grands et des plus petits coefficients, les valeurs des rapports cherchés devant être d'autant plus exactes qu'elles résultent de plus grands nombres; on conservera d'ailleurs ainsi l'avantage de faire concourir toutes les équations du problème à cette détermination. On a trouvé de cette manière :

h	M	M′	M″	M‴	M^{iv}	M^{v}	M^{vi}
h_0	$0{,}179681M^{v}_0$	$0{,}246512M^{v}_0$	$0{,}284391M^{v}_0$	$0{,}442985M^{v}_0$	$1{,}267210M^{v}_0$	....	$-0{,}883809M^{v}_0$
h_1	$0{,}002400M^{v}_1$	$-0{,}012073M^{v}_1$	$0{,}050816M^{v}_1$	$0{,}326944M^{v}_1$	$-0{,}320531M^{v}_1$	....	$-0{,}036878M^{v}_1$
h_2	$-1{,}025546M'_2$	....	$0{,}804026M'_2$	$0{,}159822M'_2$	$-0{,}000531M'_2$	$-0{,}000559M'_2$	$0{,}000118M'_2$
h_3	$11{,}011990M'_3$	....	$0{,}640283M'_3$	$0{,}104779M'_3$	$-0{,}001200M'_3$	$-0{,}001063M'_3$	$0{,}000411M'_3$
h_4	$-0{,}111530M'_4$	....	$-1{,}007472M'_4$	$3{,}373790M'_4$	$-0{,}000004M'_4$	$0{,}000031M'_4$	$-0{,}000002M'_4$
h_5	$-0{,}353146M'_5$	....	$-0{,}704006M'_5$	$-5{,}891552M'_5$	$0{,}000182M'_5$	$0{,}001211M'_5$	$-0{,}000071M'_5$
h_6	$0{,}232773M^{v}_6$	$0{,}258121M^{v}_6$	$0{,}281627M^{v}_6$	$0{,}396693M^{v}_6$	$1{,}034348M^{v}_6$	....	$17{,}250720M^{v}_6$

Il ne s'agit donc plus que de déterminer les sept quantités M^{v}_0, M^{v}_1, M'_2, etc., et les sept constantes l, l_1, l_2, etc., que renferment les valeurs complètes des quantités b, b', etc., c, c', etc., nº 64, livre II. Pour cela, conformément à ce que nous avons dit, nº cité, on a calculé, d'après les éléments des orbites planétaires rapportés nº 88, pour chacune des sept planètes principales, les quantités

$$b = e \sin \varpi, \quad b' = e' \sin \varpi, \text{ etc.}, \quad c = e \cos \varpi, \quad c' = e' \cos \varpi', \text{ etc.},$$

relatives à l'année 1800, que l'on a choisie pour époque (*). En supposant ensuite $t = 0$ dans les expressions de b, b', etc., c, c', etc., nº 64, livre II, après y avoir substitué ces valeurs, on a formé entre les quatorze inconnues M^{v}_0, M^{v}_1, M'_2 etc., l_0, l_1, etc., quatorze équations, qui ont suffi pour les déterminer. On a trouvé ainsi en opérant toujours l'élimina-

(*) Au lieu de $\varpi' = 128°43'6''$, p. 350, il faut lire $128°43'56''$.

tion par la méthode des approximations successives (voir p. 67, vol. 2e) :

$M^{v}_{0} =$ 0,0347549,	$l_0 =$ 27°17′ 7″,
$M^{v}_{1} =$ 0,0483401,	$l_1 =$ 126.44.44,
$M'_{2} =$ −0,0165894,	$l_2 =$ 36.41.43,
$M'_{3} =$ 0,0170850,	$l_3 =$ 79.33.44,
$M'_{4} =$ 0,0128082,	$l_4 =$ 306.23.32,
$M'_{5} =$ 0,0105633,	$l_5 =$ 152.15.47,
$M^{v}_{6} =$ 0,0018570,	$l_6 =$ 126.59.26.

Si l'on substitue maintenant à la place de M^{v}_{0}, M^{v}_{1}, M'_{2}, etc., leurs valeurs dans le tableau précédent, on aura celles des quantités M_0, M_1, etc., M'_0, M'_1, etc. On trouve ainsi

$M_0 =$ 0,0062448,	$M'_{0} =$ 0,0085675,	$M''_{0} =$ 0,0098839,
$M_1 =$ 0,0001160,	$M'_{1} =$ −0,0005836,	$M''_{1} =$ 0,0024564,
$M_2 =$ 0,0170132,	$M^{v}_{2} =$ 0,0000093,	$M''_{2} =$ −0,0133383,
$M_3 =$ 0,1881401,	$M^{v}_{3} =$ −0,0000182,	$M''_{3} =$ 0,0109392,
$M_4 =$ −0,0014274,	$M^{v}_{4} =$ 0,0000004,	$M''_{4} =$ −0,0128939,
$M_5 =$ −0,0037304,	$M^{v}_{5} =$ 0,0000128,	$M''_{5} =$ −0,0074366,
$M_6 =$ 0,0004323,	$M'_{6} =$ 0,0004793,	$M''_{6} =$ 0,0005229;

$M'''_{0} =$ 0,0153959,	$M^{iv}_{0} =$ 0,0440418,	$M^{vi}_{0} =$ −0,0307167,
$M'''_{1} =$ 0,0158045,	$M^{iv}_{1} =$ −0,0154945,	$M^{vi}_{1} =$ −0,0017827,
$M'''_{2} =$ −0,0026513,	$M^{iv}_{2} =$ 0,0000088,	$M^{vi}_{2} =$ −0,0000020,
$M'''_{3} =$ 0,0017902,	$M^{iv}_{3} =$ −0,0000205,	$M^{vi}_{3} =$ 0,0000070,
$M'''_{4} =$ 0,0431786,	$M^{iv}_{4} =$ −0,0000000,	$M^{vi}_{4} =$ −0,0000000,
$M_{5} =$ −0,0622342,	$M^{iv}_{5} =$ 0,0000019,	$M^{vi}_{5} =$ −0,0000008,
$M'''_{6} =$ 0,0007367,	$M^{iv}_{6} =$ 0,0019208,	$M^{vi}_{6} =$ 0,0320350.

On connaîtra ainsi les valeurs de toutes les cons-

tantes qui entrent dans les expressions complètes des variables b, c, b', c', etc., et l'on pourra, par conséquent, déterminer les valeurs de ces quantités pour un temps quelconque.

Il résulte donc de la suite d'opérations dont nous venons d'indiquer la marche, 1°. que les racines de l'équation (b) sont toutes réelles et inégales; 2°. que les coefficiens M_0, M_1, M_2, etc., sont tous de très petites quantités du même ordre que les excentricités des orbites planétaires à l'époque de 1800; conditions nécessaires et également indispensables, pour que les orbites de toutes les planètes ne fassent qu'osciller autour d'un état moyen d'ellipticité qu'aucune d'elles ne saurait dépasser.

En effet, la première condition étant remplie, les sommes $M_0 + M_1 + M_2 +$ etc., de chacun des systèmes de quantités M_0, M_1, M_2, etc., prises avec le même signe, sont des limites que les excentricités des orbites des planètes ne pourront jamais atteindre, n° 65, livre II; on aura donc dans tous les siècles :

$$e < 0{,}2171042, \quad e' < 0{,}0666763, \quad e'' < 0{,}0574712, \quad e''' < 0{,}1417914,$$
$$e^{\text{IV}} < 0{,}0614883, \quad e^{\text{V}} < 0{,}0849927, \quad e^{\text{VI}} < 0{,}0645442.$$

Ces limites sont encore assez petites pour qu'on puisse assurer que les orbites de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, différeront peu dans les siècles futurs de leur forme actuelle, et demeureront toujours à très peu près circulaires comme elles le sont aujourd'hui.

Si l'on compare les résultats précédens à ceux qu'avait obtenus Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1782)

en séparant l'ensemble de toutes les planètes en deux groupes différens, l'un composé de Jupiter et Saturne, auxquels il joignit plus tard la planète Uranus (*) et qu'il considère comme formant un système indépendant; l'autre composé de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, en tenant compte de l'action de Jupiter et Saturne sur ces quatre planètes; on verra que l'accord presque complet qui existe entre nos résultats et ceux de ce grand géomètre, garantit leur exactitude et justifie de plus l'ingénieuse hypothèse qu'il avait imaginée pour simplifier son calcul; hypothèse qui d'ailleurs est naturellement indiquée au calculateur par la forme des équations fondamentales (*a*) du problème. L'accord de ces résultats, malgré les changemens qu'ont subis les masses planétaires employées par Lagrange, permet encore de croire que les corrections futures qu'on pourrait introduire dans les valeurs de ces masses, et qui seront nécessairement très légères, n'altéreront pas d'une manière sensible les conclusions auxquelles nous sommes parvenus, et que les calculs précédens, comme nous l'avons dit n° 56, pouvaient seuls rendre rigoureuses.

Considérons maintenant les variations des inclinaisons et des nœuds. Les équations qui les déterminent étant de même forme que celles qui se rapportent aux excentricités et aux périhélies, peuvent être traitées de la même manière.

$$p = \mathrm{N}\sin(gt + l'_0),\quad p' = \mathrm{N}'\sin(gt + l'_1),\quad p'' = \mathrm{N}''\sin(gt + l'_2),\ \text{etc.},$$
$$q = \mathrm{N}\cos(gt + l'_0),\quad q' = \mathrm{N}'\cos(gt + l'_1),\quad q'' = \mathrm{N}''\cos(gt + l'_2),\ \text{etc.}$$

(*) *Mémoires de Berlin*, 1787.

En supposant dans les équations (c) n° 69, livre II, et en substituant à la place des quantités représentées par $[a, a']$, $[a, a'']$ (*Voy.* la note, p. 388), etc., leurs valeurs, on a formé d'abord les sept équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}(g+5'',57620)N - 2'',01034N' - 0'',96382N'' - 0'',02798N''' \\ \qquad - 1'',59515N^{\text{iv}} - 0'',07706N^{\text{v}} - 0'',00185N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+12'',32652)N' - 0'',42232N - 7'',41628N'' - 0'',10205N''' \\ \qquad - 4'',18277N^{\text{iv}} - 0'',19836N^{\text{v}} - 0'',00474N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+12'',93787)N'' - 0'',09757N - 5'',17404N' - 0'',29823N''' \\ \qquad - 7'',03466N^{\text{iv}} - 0'',32565N^{\text{v}} - 0'',00772N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+17'',68788)N''' - 0'',01866N - 0'',46898N' - 1'',96455N'' \\ \qquad - 14'',59132N^{\text{iv}} - 0'',62974N^{\text{v}} - 0'',01463N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+7'',48977)N^{\text{iv}} - 0'',00023N - 0'',00409N' - 0'',00986N'' \\ \qquad - 0'',00311N''' - 7'',36728N^{\text{v}} - 0'',10520N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+18'',51775)N^{\text{v}} - 0'',00003N - 0'',00048N' - 0'',00112N'' \\ \qquad - 0'',00033N''' - 18'',12913N^{\text{iv}} - 0'',38666N^{\text{vi}}\end{array}\right\}=0, \\
\left.\begin{array}{l}(g+2'',32247)N^{\text{vi}} - 0'',00000N - 0'',00004N' - 0'',00010N'' \\ \qquad - 0'',00003N''' - 0'',93131N^{\text{iv}} - 1'',39099N^{\text{v}}\end{array}\right\}=0,
\end{array}\right\} (d)$$

Ces équations feront connaître les rapports des constantes N, N′, N″, etc., entre elles, et si l'on élimine toutes ces quantités, on aura une équation finale qui ne contiendra que l'inconnue g.

Mais, d'abord on doit observer que les facteurs numériques qui multiplient N dans la première des équations précédentes, N′ dans la seconde, et ainsi de suite, étant égaux respectivement à la somme de tous les autres coefficiens de la même équation, on satisfera à ces équations en faisant toutes les constantes N, N′, N″, etc., égales entre elles, ce qui donne $g=0$. Il suit de là, par conséquent, que l'une des racines de l'équation du septième degré qui résultera

de l'élimination des quantités N, N', etc., étant égale à zéro, cette équation doit nécessairement s'abaisser au sixième degré. En suivant en effet les procédés ordinaires, on est parvenu à l'équation suivante,

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}01194g^6 + 0{,}91750g^5 + 26{,}80087g^4 + 372{,}61277g^3 \\ \quad + 2535{,}64058g^2 + 7948{,}33000g + 8884{,}03400 \end{array}\right\} = 0. \qquad (e)$$

En résolvant cette équation par les méthodes d'approximation, on a trouvé pour g les six valeurs suivantes,

$$\begin{array}{ll} g_1 = -25'',81967, & g_4 = -7'',06921, \\ g_2 = -18\ ,98127, & g_5 = -4\ ,88242, \\ g_3 = -17\ ,60564, & g_6 = -2\ ,49896. \end{array}$$

Comme ces valeurs, et par conséquent les racines de l'équation (e) sont toutes réelles et inégales, il en résulte, n° 69, livre II, que les expressions des variables p, p', etc., q, q', etc., seront composées d'une suite de sinus et de cosinus d'arcs différens, mais qu'elles ne contiendront ni exponentielles, ni arcs de cercle.

Si l'on substitue successivement à la place de g les six valeurs précédentes dans les formules (d), on formera six systèmes d'équations au moyen desquelles on pourra déterminer les rapports des sept quantités N, N' etc., à l'une quelconque d'entre elles, relativement à chacune des valeurs en g qu'on aura choisie. Et comme cette détermination n'exige que six équations dans chaque système, on réunira entre elles, pour plus d'exactitude, les deux équations qui auront les plus grands et les plus petits coefficients; on a trouvé ainsi :

g	N	N′	N″	N‴	N^{iv}	N^{v}	N^{vi}
g_1	0,016396N^{v}_1	0,027151N^{v}_1	0,141237N^{v}_1	0,607979N^{v}_1	-0,401871N^{v}_1	....	- 0,043266N^{v}_1
g_2	-0,139293N'_2	....	-0,901287N'_2	0,854250N'_2	0,000007N'_2	0,000279N'_2	- 0,000022N'_2
g_3	-0,173533N'_3	....	-0,591565N'_3	-8,042462N'_3	0,000323N'_3	0,003189N'_3	- 0,000294N'_3
g_4	-2,312800N'_4	....	0,838260N'_4	0,218897N'_4	-0,001139N'_4	-0,001658N'_4	0,000684N'_4
g_5	5,145510N'_5	....	0,709417N'_5	0,153411N'_5	-0,001325N'_5	-0,001662N'_5	- 0,001355N'_5
g_6	3,295445N^{v}_6	2,154026N^{v}_6	1,960225N^{v}_6	1,490195N^{v}_6	1,184870N^{v}_6	....	-14,135774N^{v}_6

En joignant aux valeurs précédentes celles de $N_o = N^{vi}_o$, $N'_o = N^{vi}_o$, etc., qui se rapportent au cas où $g = o$, et en les substituant dans les équations (d) du n° 69, livre II, il ne restera plus d'indéterminées dans ces équations, que les sept quantités N^{v}_o, N^{v}_1, N'_2, etc., et les sept arbitraires l'_o, l'_1, l'_2, etc., qui sont les constantes introduites par l'intégration.

On les déterminera en remplaçant dans ces équations, les variables p, q, p', q', etc., par leurs valeurs relatives à l'époque de 1800, et en y supposant $t = o$; on a trouvé ainsi, en opérant comme on l'a dit p. 390,

$$
\begin{aligned}
N^{v}_o &= 0{,}0270830, & l_o &= 193°13'35'',\\
N^{v}_1 &= 0{,}0160913, & l_1 &= 125.29.37,\\
N'_2 &= 0{,}0279541, & l_2 &= 74.43.59,\\
N'_3 &= 0{,}0052362, & l_3 &= 126.32.59,\\
N'_4 &= 0{,}0103138, & l_4 &= 273.\ 2.\ 6,\\
N'_5 &= 0{,}0201229, & l_5 &= 22.21.29,\\
N^{v}_6 &= 0{,}0011425, & l_6 &= 127.12.55.
\end{aligned}
$$

En multipliant ces valeurs de N^{v}_o, N^{v}_1, N'_2 etc., par les coëfficiens qui leur correspondent dans le tableau précédent, on a trouvé

$N_0 = 0{,}0270830,$ $N'_0 = 0{,}0270830,$ $N''_0 = 0{,}0270830,$
$N_1 = 0{,}0002638,$ $N'_1 = 0{,}0004369.$ $N''_1 = 0{,}0022727,$
$N_2 = -0{,}0038938,$ $N^{v}_2 = 0{,}0000078,$ $N''_2 = -0{,}0251916,$
$N_3 = -0{,}0009087,$ $N^{v}_3 = 0{,}0000167,$ $N''_3 = -0{,}0030976,$
$N_4 = -0{,}0238538,$ $N^{v}_4 = -0{,}0000171,$ $N''_4 = 0{,}0086456,$
$N_5 = 0{,}1035446,$ $N^{v}_5 = -0{,}0000334,$ $N''_5 = 0{,}0142755,$
$N_6 = 0{,}0037651,$ $N'_6 = 0{,}0024610,$ $N''_6 = 0{,}0022396;$

$N'''_0 = 0{,}0270830,$ $N^{iv}_0 = 0{,}0270830,$ $N^{vi}_0 = 0{,}0270830,$
$N'''_1 = 0{,}0097832,$ $N^{iv}_1 = -0{,}0064666,$ $N^{vi}_1 = -0{,}0006962,$
$N'''_2 = 0{,}0238799,$ $N^{iv}_2 = 0{,}0000002,$ $N^{vi}_2 = -0{,}0000006,$
$N'''_3 = -0{,}0421120,$ $N^{iv}_3 = 0{,}0000017,$ $N^{vi}_3 = -0{,}0000015,$
$N'''_4 = 0{,}0022577,$ $N^{iv}_4 = -0{,}0000117,$ $N^{vi}_4 = 0{,}0000071,$
$N'''_5 = 0{,}0030871,$ $N^{iv}_5 = -0{,}0000267,$ $N^{vi}_5 = -0{,}0000273,$
$N'''_6 = 0{,}0017026,$ $N^{iv}_6 = 0{,}0013538,$ $N^{vi}_6 = -0{,}0161506.$

En appliquant aux inclinaisons ce que nous avons dit n° 65, livre II, relativement aux excentricités, on en conclut que la somme de tous les coefficiens N_0, N_1, N_2 etc., dans chacun des systèmes précédens, pris avec le même signe, sont les limites que les tangentes des inclinaisons ne pourront pas dépasser. On aura donc relativement à Mercure, Vénus, la Terre, etc.,

$\tang \varphi < 0{,}1633128,$ $\tang \varphi' < 0{,}0936079,$ $\tang \varphi'' < 0{,}0828086,$
$\tang \varphi''' < 0{,}1099055,$ $\tang \varphi^{iv} < 0{,}0349437,$ $\tang \varphi^{v} < 0{,}0443918,$
$\tang \varphi^{vi} < 0{,}0439663;$

et par conséquent

$\varphi < 9°16'31'',$ $\varphi' < 5°20'52'',$ $\varphi'' < 4°44'1'',$ $\varphi''' < 6°16'19'',$
$\varphi^{iv} < 2.\ 0.\ 4,$ $\varphi^{v} < 2.32.30,$ $\varphi^{vi} < 2.31.3.$

Ainsi donc, on est assuré que quelque déplacement qu'éprouvent, par la suite des siècles, les orbes planétaires, leurs inclinaisons au plan de l'écliptique seront toujours moindres que les angles précédens; et comme le plus grand de ces angles ne

dépasse guère 9°, il s'ensuit que les orbes planétaires resteront toujours renfermés dans une zone de la sphère céleste, dont la largeur sera à peu près celle du zodiaque, et que par conséqnent la stabilité du système solaire est assurée relativement aux inclinaisons comme elle l'est par rapport aux excentricités.

Les résultats précédens n'ont lieu, il est vrai, qu'autant qu'on néglige, dans les équations différentielles, les puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures à la seconde et les termes dépendant du carré des masses; mais on a vu, n° 56, par quelles considérations on peut les étendre à toutes les puissances des excentricités, des inclinaisons et des masses perturbatrices.

Si l'on substitue les valeurs précédentes, dans les équations générales (d) des nos 64 et 69, du livre II, on aura des formules propres à déterminer les variations séculaires des excentricités et des périhélies, des inclinaisons et des nœuds des orbes planétaires pour un nombre quelconque d'années juliennes, soit à partir de 1800, soit antérieures à cette époque, en supposant t négatif. Pour que dans ces formules les longitudes soient comptées de l'équinoxe vrai, il faudra les augmenter de la précession des équinoxes pendant l'intervalle écoulé depuis l'équinoxe de 1800; ce qui revient à augmenter de 50",2235o (*) les valeurs de tous les coefficiens h, h_1, h_2, etc., g, g_1, g_2, etc., qui multiplient t sous le signe sinus ou cosinus. En faisant donc généralement $k = 50'',22350 + h$, $f = 50'',22350 + g$, ce qui donne

(*) Précession annuelle selon Bessel (*Conn. des Tems* 1831).

$k_0 = 53'',93036,\quad k_1 = 72'',48357,\quad k_2 = 57'',85445,\quad k_3 = 55'',60270,$
$k_4 = 68'',71250,\quad k_5 = 67'',33882,\quad k_6 = 52'',47814;$

$f_0 = 50'',22350,\quad f_1 = 24'',40383,\quad f_2 = 31'',24223,\quad f_3 = 32'',61786,$
$f_4 = 43'',15429,\quad f_5 = 45'',34108,\quad f_6 = 47'',72454.$

On aura pour un temps t quelconque, à partir de 1800,

Mercure.

$$b = 0{,}006245 \sin(k_0 t + l_0) + 0{,}000116 \sin(k_1 t + l_1) + 0{,}017013 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}188140 \sin(k_3 t + l_3) - 0{,}001427 \sin(k_4 t + l_4) - 0{,}003730 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000432 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c = 0{,}006245 \cos(k_0 t + l_0) + 0{,}000116 \cos(k_1 t + l_1) + 0{,}017013 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}188140 \cos(k_3 t + l_3) - 0{,}001427 \cos(k_4 t + l_4) - 0{,}003730 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000432 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) + 0{,}000264 \sin(f_1 t + l'_1) - 0{,}003894 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}000909 \sin(f_3 t + l'_3) - 0{,}023854 \sin(f_4 t + l'_4) + 0{,}103545 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}003765 \sin(f_6 t + l'_6).$$

$$q = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) + 0{,}000264 \cos(f_1 t + l'_1) - 0{,}003894 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}000909 \cos(f_3 t + l'_3) - 0{,}023854 \cos(f_4 t + l'_4) - 0{,}103545 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}003765 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Vénus.

$$b' = 0{,}008568 \sin(k_0 t + l_0) - 0{,}000584 \sin(k_1 t + l_1) - 0{,}016589 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}017085 \sin(k_3 t + l_3) + 0{,}012808 \sin(k_4 t + l_4) + 0{,}010563 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000479 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c' = 0{,}008568 \cos(k_0 l + l_0) - 0{,}000584 \cos(k_1 t + l_1) - 0{,}016589 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}017085 \cos(k_3 t + l_3) + 0{,}012808 \cos(k_4 t + l_4) + 0{,}010563 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000479 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p' = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) + 0{,}000437 \sin(f_1 t + l'_1) + 0{,}027954 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}005236 \sin(f_3 t + l'_3) + 0{,}010314 \sin(f_4 t + l'_4) + 0{,}020123 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}002461 \sin(f_6 t + l'_6).$$

$$q' = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) + 0{,}000437 \cos(f_1 t + l'_1) + 0{,}027954 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}005236 \cos(f_3 t + l'_3) + 0{,}010314 \cos(f_4 t + l'_4) + 0{,}020123 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}002461 \cos(f_6 t + l'_6).$$

La Terre.

$$b'' = 0{,}009884 \sin(k_0 t + l_0) + 0{,}002456 \sin(k_1 t + l_1) - 0{,}013338 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}010939 \sin(k_3 t + l_3) - 0{,}012894 \sin(k_4 t + l_4) - 0{,}007437 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000523 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c'' = 0{,}009884 \cos(k_0 t + l_0) + 0{,}002456 \cos(k_1 t + l_1) - 0{,}013338 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}010939 \cos(k_3 t + l_3) - 0{,}012894 \cos(k_4 t + l_4) - 0{,}007437 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000523 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p'' = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) + 0{,}002273 \sin(f_1 t + l'_1) - 0{,}025195 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}003098 \sin(f_3 t + l'_3) + 0{,}008646 \sin(f_4 t + l'_4) + 0{,}014276 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}002240 \sin(f_6 t + l'_6).$$

$$q'' = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) + 0{,}002273 \cos(f_1 t + l'_1) - 0{,}025195 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}003098 \cos(f_3 t + l'_3) + 0{,}008646 \cos(f_4 t + l'_4) + 0{,}014276 \cos(f_5 t + l'_6)$$
$$+ 0{,}002240 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Mars.

$$b''' = 0{,}015396 \sin(k_0 t + l_0) + 0{,}015805 \sin(k_1 t + l_1) - 0{,}002651 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}001790 \sin(k_3 t + l_3) + 0{,}043179 \sin(k_4 t + l_4) - 0{,}062234 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000737 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c''' = 0{,}015396 \cos(k_0 t + l_0) + 0{,}015805 \cos(k_1 t + l_1) - 0{,}002651 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}001790 \cos(k_3 t + l_3) + 0{,}043179 \cos(k_4 t + l_4) - 0{,}062234 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}000737 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p''' = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) + 0{,}009783 \sin(f_1 t + l'_1) + 0{,}023879 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$0{,}042112 \sin(f_3 t + l'_3) + 0{,}002258 \sin(f_4 t + l'_4) + 0{,}003087 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001703 \sin(f_6 t + l'_6).$$

$$q''' = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) + 0{,}009783 \cos(f_1 t + l'_1) + 0{,}023879 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}042112 \cos(f_3 t + l'_3) + 0{,}002258 \cos(f_4 t + l'_4) + 0{,}003087 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001703 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Jupiter.

$$b^{IV} = 0{,}044042 \sin(k_0 t + l_0) - 0{,}015495 \sin(k_1 t + l_1) + 0{,}000009 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$- 0{,}000021 \sin(k_3 t + l_3) - 0{,}000000 \sin(k_4 t + l_4) + 0{,}000002 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}001921 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c^{IV} = 0{,}044042 \cos(k_0 t + l_0) - 0{,}015495 \cos(k_1 t + l_1) + 0{,}000009 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$- 0{,}000021 \cos(k_3 t + l_3) - 0{,}000000 \cos(k_4 t + l_4) + 0{,}000002 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}001921 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p^{IV} = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) - 0{,}006467 \sin(f_1 t + l'_1) + 0{,}000000 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}000002 \sin(f_3 t + l'_3) - 0{,}000012 \sin(f_4 t + l'_4) - 0{,}000027 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001354 \sin(f_6 t + l'_6).$$

$$q^{IV} = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) - 0{,}006467 \cos(f_1 t + l'_1) + 0{,}000000 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}000002 \cos(f_3 t + l'_3) - 0{,}000012 \cos(f_4 t + l'_4) - 0{,}000027 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001354 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Saturne.

$$b^{V} = 0{,}034755 \sin(k_0 t + l_0) + 0{,}048340 \sin(k_1 t + l_1) + 0{,}000009 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$- 0{,}000018 \sin(k_3 t + l_3) + 0{,}000000 \sin(k_4 t + l_4) + 0{,}000013 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}001857 \sin(k_6 t + l_6).$$

$$c^{V} = 0{,}034755 \cos(k_0 l + t_0) + 0{,}048340 \cos(k_1 t + l_1) + 0{,}000009 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$- 0{,}000018 \cos(k_3 t + l_3) + 0{,}000000 \cos(k_4 t + l_4) + 0{,}000013 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}001857 \cos(k_6 t + l_6).$$

$$p^{v} = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) + 0{,}016091 \sin(f_1 t + l'_1) + 0{,}000034 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}000017 \sin(f_3 t + l'_3) - 0{,}000017 \sin(f_4 t + l'_4) - 0{,}000034 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001143 \sin(f_6 t + l'_6).$$
$$q^{v} = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) + 0{,}016091 \cos(f_1 t + l'_1) + 0{,}000008 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$+ 0{,}000017 \cos(f_3 t + l'_3) - 0{,}000017 \cos(f_4 t + l'_4) - 0{,}000033 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$+ 0{,}001143 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Uranus.

$$b^{vi} = -0{,}030717 \sin(k_0 t + l_0) - 0{,}001783 \sin(k_1 t + l_1) - 0{,}000002 \sin(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}000007 \sin(k_3 t + l_3) - 0{,}000000 \sin(k_4 t + l_4) - 0{,}000001 \sin(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}032035 \sin(k_6 t + l_6).$$
$$c^{vi} = -0{,}030717 \cos(k_0 t + l_0) - 0{,}001783 \cos(k_1 t + l_1) - 0{,}000002 \cos(k_2 t + l_2)$$
$$+ 0{,}000007 \cos(k_3 t + l_3) - 0{,}000000 \cos(k_4 t + l_4) - 0{,}000000 \cos(k_5 t + l_5)$$
$$+ 0{,}032035 \cos(k_6 t + l_6).$$
$$p^{vi} = 0{,}027083 \sin(f_0 t + l'_0) - 0{,}000696 \sin(f_1 t + l'_1) - 0{,}000000 \sin(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}000002 \sin(f_3 t + l'_3) + 0{,}000007 \sin(f_4 t + l'_4) - 0{,}000027 \sin(f_5 t + l'_5)$$
$$- 0{,}016151 \sin(f_6 t + l'_6).$$
$$q^{vi} = 0{,}027083 \cos(f_0 t + l'_0) - 0{,}000696 \cos(f_1 t + l'_1) - 0{,}000000 \cos(f_2 t + l'_2)$$
$$- 0{,}000002 \cos(f_3 t + l'_3) + 0{,}000007 \cos(f_4 t + l'_4) - 0{,}000027 \cos(f_5 t + l'_5)$$
$$- 0{,}016151 \cos(f_6 t + l'_6).$$

Ces valeurs de p, q, p', etc., se rapportent à une écliptique fixe; il sera facile d'en conclure les valeurs de $p_{,}$, $q_{,}$, $p'_{,}$, etc., relatives à l'écliptique vraie, au moyen des formules

$$p_{,} = p - p'', \quad q_{,} = q - q'', \quad p'_{,} = p' - p'', \quad q'_{,} = q' - q'', \text{ etc.}$$

La racine de la somme des carrés des expressions de b et c, et de p et q, relatives à chaque planète, donnera la valeur de l'excentricité de son orbite et de la tangente de l'inclinaison à l'écliptique; le quotient des mêmes expressions divisées l'une par l'autre, donnera les tangentes de la longitude du périhélie et du nœud.

93. En réduisant en nombres les formules du n° 90, et en ne considérant que l'action de Saturne sur Jupiter, on a trouvé

$$\left(\overline{a^{\text{iv}},\ a^{\text{v}}}\right)_1 = -(1+\mu^{\text{v}})\,22'',90370,$$
$$\left(\overline{a^{\text{iv}},\ a^{\text{v}}}\right)_2 = -(1+\mu^{\text{v}})\,26'',58735,$$
$$\left(\overline{a^{\text{iv}},\ a^{\text{v}}}\right)_3 = -(1+\mu^{\text{v}})\,41'',06335.$$

Il est inutile d'avoir égard aux quantités analogues qui proviennent de l'action des autres planètes, parce qu'il n'en résulterait dans les expressions des longitudes vraies que des inégalités inappréciables. En substituant les valeurs précédentes dans la formule (p), n° 90, pour déterminer les variations séculaires de la longitude de l'époque de Jupiter, on aura

$$\frac{d\epsilon^{\text{iv}}}{dt} = -22'',90370 e^{\text{iv}\,2} - 26'',58735 e^{\text{v}\,2} + 41'',06335 e^{\text{iv}} e^{\text{v}} \cos(\varpi' - \varpi).$$

Si dans cette formule, à la place de e^{iv}, e^{v}, ϖ^{iv}, ϖ^{v}, on substitue leurs valeurs augmentées de leurs variations, qu'on supprime ensuite tous les termes qui après l'intégration seraient simplement proportionnels au temps t, et qui se confondent avec le moyen mouvement $n^{\text{iv}} t$ dans l'expression de la longitude moyenne, on aura :

$$\frac{d\epsilon^{\text{iv}}}{dt} = -22'',90370\,t\,2e^{\text{iv}}\frac{de^{\text{iv}}}{dt} - 26'',58735\,t\,2e^{\text{v}}\frac{de^{\text{v}}}{dt}$$
$$+41'',06335.t\left[\left(e^{\text{iv}}\frac{de^{\text{v}}}{dt} + e^{\text{v}}\frac{de^{\text{iv}}}{dt}\right)\cos(\varpi^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}}) - e^{\text{iv}}e^{\text{v}}\frac{d\varpi^{\text{v}}-d\varpi^{\text{iv}}}{dt}\sin(\varpi^{\text{v}}-\varpi^{\text{iv}})\right].$$

Nous avons trouvé, n° 91, en faisant abstraction des corrections dont les masses planétaires sont susceptibles :

$$\frac{de^{\text{iv}}}{dt} = 0'',265125,\quad \frac{de^{\text{v}}}{dt} = -0'',640259,\quad \frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt} = 6'',352560,\quad \frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt} = 16'',017932;$$

on a d'ailleurs, n° 88 :

$$e^{\text{iv}} = 0,0481621,\quad e^{\text{v}} = 0,0561505,\quad \varpi^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}} = 78^\circ\,0'\,44''.$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$\frac{d\epsilon^{iv}}{dt} = 0{,}0000006826\,8\,t\,;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\delta\epsilon^{iv} = -\,0'',00000034134\,t^2.$$

Cette inégalité, qui ne s'éleverait qu'à quelques millièmes de seconde dans un siècle, est insensible relativement aux observations les plus anciennes qui nous soient parvenues; on peut par conséquent la négliger.

L'équation (3) du n° 74 du livre II donne, en ne considérant que les inégalités séculaires,

$$\delta\epsilon^{v} = -\frac{m^{iv}\sqrt{a^{iv}}}{m^{v}\sqrt{a^{v}}}\cdot\delta\epsilon^{iv};$$

on aura donc relativement à Saturne

$$\delta\epsilon^{v} = -\,0{,}000001653901\,t^2.$$

Cette inégalité peut être négligée sans erreur sensible. Les valeurs précédentes de $\delta\epsilon^{iv}$ et de $\delta\epsilon^{v}$ diffèrent de celles que nous avions données n° 75, livre II, tant parce que celles-ci se rapportaient à l'époque de 1750, qu'à cause des changemens que nous avons fait subir aux masses de Jupiter et de Saturne.

Nous n'avons pas considéré la partie constante de l'expression de $\frac{d\epsilon^{iv}}{dt}$, parce qu'elle se confond avec la constante n dans l'expression du moyen mouvement, et qu'on peut d'ailleurs la faire disparaître, ainsi que nous l'avons pratiqué jusqu'ici, en déterminant convenablement la constante g qui entre dans l'expression de la longitude moyenne. Mais, en nommant, comme dans le n° 75 du livre II, An^{iv} cette constante, et a^{iv} le grand axe de l'orbite de Jupiter, cor-

respondant au moyen mouvement observé, abstraction faite de la partie dépendante de la variation séculaire de la longitude de l'époque, on aura, numéro cité,

$$a_1^{\mathrm{v}} = a^{\mathrm{v}}\left(1 + \tfrac{2}{3}A\right).$$

D'après les valeurs précédentes, on trouve........ $A = -0{,}0000695244$; on aura donc ainsi :

$$a_1^{\mathrm{v}} = 5{,}20121002.$$

On voit, par conséquent, qu'il ne résulterait dans les valeurs du grand axe de Jupiter, et à plus forte raison dans celles des grands axes des autres planètes, de la considération de la constante A, que des corrections très légères, ce qui est conforme à ce que l'on a dit n° 75, livre II.

On pourrait obtenir des valeurs plus exactes des inégalités qui affectent les longitudes des époques de Jupiter et de Saturne, et qui s'étendraient à tous les siècles passés et futurs par la méthode indiquée n° 76, livre II; mais ces inégalités étant absolument insensibles, cette recherche devient sans objet.

On a vu dans les chapitres précédens que l'ellipticité du Soleil, l'action des étoiles et des comètes ne produisent dans les excentricités, les périhélies, les nœuds et les inclinaisons des orbes planétaires, que des variations insensibles; les inégalités séculaires dépendantes de ces causes peuvent donc être négligées, et les formules précédentes feront connaître, par conséquent, les changemens que subiront, dans la suite des temps, ces divers élémens avec toute l'exactitude convenable.

CHAPITRE XII.

Détermination des constantes qui entrent dans les expressions du rayon vecteur, et du mouvement en longitude et en latitude des planètes.

94. Dans le n°94 du livre II, nous avons disposé des quatre constantes arbitraires qui entrent dans les formules qui déterminent les perturbations du rayon vecteur et du mouvement en longitude de la planète m soumise à l'action des autres planètes, par la condition que la longitude moyenne et l'équation du centre demeurassent les mêmes dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé.

Cette disposition introduit dans l'expression du rayon vecteur un terme constant et une partie dépendante du même argument que l'équation du centre, parce que cette partie ne peut disparaître à la fois dans l'expression du rayon vecteur et dans celle de la longitude. Déterminons ces différens termes.

Si l'on nomme a la distance moyenne de la planète m au Soleil, la constante a, dans l'hypothèse elliptique, se déduira du moyen mouvement observé par l'équation $a^3 = \frac{1+m}{n^2}$, la masse du Soleil étant

prise pour unité. De cette équation on tire

$$a = n^{-\frac{2}{3}}(1 + \tfrac{1}{3}m).$$

Tel est par conséquent le grand axe dont on doit faire usage dans la partie elliptique du rayon vecteur. Les valeurs des demi-grands axes des orbites planétaires données n° 88, supposent

$$a = n^{-\frac{2}{3}}, \quad a' = n'^{-\frac{2}{3}}, \text{ etc.}$$

Il faudra donc, dans le calcul de la partie elliptique du rayon vecteur, augmenter respectivement les valeurs de a, a', etc., de $\frac{1}{3}ma$, $\frac{1}{3}m'a'$, etc.; dans le calcul de la partie qui dépend du mouvement troublé, cette correction est inutile tant qu'on néglige les quantités de l'ordre du carré des masses. Au reste, l'augmentation précédente n'est sensible que pour Jupiter et Saturne; d'après les valeurs rapportées plus haut, on trouve

$$\tfrac{1}{3}m^{\text{iv}}a^{\text{iv}} = 0{,}00164507, \quad \tfrac{1}{3}m^{\text{v}}a^{\text{v}} = 0{,}00090553.$$

Si l'on ajoute ces valeurs à celles de a^{iv} et a^{v} du n° 88, on aura

$$a^{\text{iv}} = 5{,}20281143;$$
$$a^{\text{v}} = 9{,}53877643.$$

Ce sont les valeurs des demi-grands axes a^{iv} et a^{v} dont on doit faire usage pour calculer la partie elliptique du rayon vecteur de Jupiter et de Saturne.

Maintenant, il résulte du terme constant introduit dans l'expression du rayon vecteur que la distance moyenne de la planète au Soleil diffère dans l'orbite

troublée et dans l'orbite elliptique. Ainsi, la constante a qui représente cette distance moyenne dans cette dernière orbite, devra être augmentée de la partie constante de l'expression du rayon vecteur dans l'orbite troublée, pour former la valeur de la distance moyenne qui lui correspond.

La partie non périodique du rayon vecteur de la planète m troublée par l'action des planètes m', m'', etc., est égale à

$$-\frac{m'}{6}\,a^3\,\frac{dA^{(0)}}{da}-\frac{m''}{6}\,a^3\,\frac{dA^{(0)}}{da}-\text{etc.}$$

En augmentant donc respectivement les valeurs de a, a', ainsi déterminées, de la partie correspondante à la précédente qui se rapporte à chacune des planètes m, m', etc., on aura la distance moyenne de la planète au Soleil relative au mouvement troublé.

La partie de l'expression du rayon vecteur dans l'orbite troublée, qui dépend du même argument que le premier terme de l'équation du centre, se compose des deux termes :

$$+m'afe\cos(nt+\varepsilon-\varpi)+m'af'e'\cos(nt+\varepsilon-\varpi')\,;$$

f et f' étant déterminés par les deux équations suivantes (*) :

$$f=\frac{2}{3}a^2\frac{dA^{(0)}}{da}+\frac{1}{4}a^3\frac{d^2A^{(0)}}{da^2},$$

$$f'=\frac{1}{4}\left(aA^{(1)}-a^2\frac{dA^{(1)}}{da}-a^3\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right).$$

(*) Supplément au livre II.

il sera donc facile de calculer les coefficiens des deux inégalités précédentes, et l'on pourra les réunir, dans une même table, aux inégalités semblables de la partie elliptique du rayon vecteur.

Quant aux constantes γ et Π qui entrent dans les formules du mouvement en latitude, et qui dépendent de la position mutuelle des orbites, on les déterminera au moyen des valeurs rapportées n° 88, en considérant le triangle sphérique compris entre l'écliptique, le plan de l'orbite de la planète troublée et celui de la planète perturbatrice.

Nous allons maintenant nous occuper de déterminer les corrections du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, résultant de l'action mutuelle des planètes en réduisant en nombres les formules du n° 84 du livre II, et des chapitres précédens.

THÉORIE PARTICULIÈRE
DES SEPT PLANÈTES PRINCIPALES.

CHAPITRE XIII.

Théorie de Mercure.

95. Les inégalités de Mercure indépendantes des excentricités et celles qui dépendent de leur première puissance, ont été calculées par les formules du n°84 du livre II, dans lesquelles on a substitué pour $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, etc., et leurs différences, leurs valeurs en fonction de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, $b_{\frac{1}{2}}^{(2)}$, etc. Il en a été de même pour les autres planètes. On a négligé les perturbations du rayon vecteur dont l'effet sur la longitude géocentrique de la planète serait au-dessous d'une seconde. Quant à la limite qu'une inégalité du rayon vecteur doit atteindre pour produire une seconde sur la longitude géocentrique de Mercure, on la déterminera de la manière suivante :

Soit V cette longitude, r le rayon vecteur de la planète, et v sa longitude vraie dans son orbite; soient r'' et v'', les mêmes quantités relatives à la Terre; si l'on considère le triangle compris entre Mercure, la Terre et le Soleil, qu'on nomme ρ la distance de Mercure à la Terre, et qu'on fasse $\frac{r}{r''}=\alpha$, on aura, aux quantités près de l'ordre du

carré des inclinaisons des orbites,

$$\rho = r'' \sqrt{1 - 2\alpha \cos(v'' - v) + \alpha^2}.$$

Si l'on différentie cette expression par rapport à la caractéristique δ, en ne faisant varier que r dans α, on aura

$$\delta\rho = \frac{\delta r}{r''}\left[\frac{r - r''\cos(v'' - v)}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos(v'' - v) + \alpha^2}}\right].$$

Le même triangle donne

$$\sin V = \frac{r\sin(v'' - v)}{\rho};$$

d'où, en différentiant et en substituant pour ρ et $d\rho$ leurs valeurs, on tire

$$\delta V \cos V = \frac{\delta r}{r''} \cdot \frac{[1 - \alpha\cos(v'' - v)]\sin(v'' - v)}{1 - 2\alpha\cos(v'' - v) + \alpha^2}.$$

La valeur précédente de sin V donne

$$\cos V = \frac{\sqrt{\rho^2 - r^2\sin^2(v'' - v)}}{\rho},$$

ou bien, en mettant pour ρ sa valeur,

$$\cos V = \pm \frac{1 - \alpha\cos(v'' - v)}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos(v'' - v) + \alpha^2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de $\delta V \cos V$, on aura

$$\delta V = \pm \frac{\delta r}{r''} \cdot \frac{\sin(v'' - v)}{1 - 2\alpha\cos(v'' - v) + \alpha^2};$$

le *maximum* de la fonction

$$\frac{\sin(v'' - v)}{1 - 2\alpha\cos(v'' - v) + \alpha^2}$$

correspond à

$$\cos(v'' - v) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2};$$

ce qui donne $\sin(v'' - v) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}$. En substituant ces valeurs dans la fonction précédente, on trouve que ce *maximum* est égal à $\frac{1}{1 - \alpha^2}$. On a donc dans ce cas

$$\delta r = - r''(1 - \alpha^2)\,\delta V. \qquad (a)$$

Si l'on suppose $\delta V = \pm 1''$, et que pour r et r'' on prenne les moyennes distances de Mercure et de la Terre au Soleil, ce qui donne $r'' = 1$ et $\alpha = 0{,}38709812$, on aura

$$\delta r = \mp 0{,}0000041204.$$

On pourra donc négliger les inégalités du rayon vecteur dont le coefficient serait au-dessous de 0,0000041. Quant aux inégalités du mouvement en longitude et en latitude, nous négligerons toutes celles dont le coefficient serait au-dessous d'un dixième de seconde.

Inégalités de Mercure indépendantes des excentricités.

$$\delta v = (1 + \mu').\left\{\begin{array}{l} \ 0'',631431 \sin(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ -\ 2'',580521 \sin 2(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \\ -\ 0'',226822 \sin 3(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu'').\left\{\begin{array}{l} \ 0'',186992 \sin(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \\ -\ 0'',153222 \sin 2(n''t - nt + \epsilon'' - \epsilon) \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu^{\text{IV}}).\left\{\begin{array}{l} \ 0'',576447 \sin(n^{\text{IV}}t - nt + \epsilon^{\text{IV}} - \epsilon) \\ -\ 0'',119863 \sin 2(n^{\text{IV}}t - nt + \epsilon^{\text{IV}} - \epsilon). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v = (1 + \mu')\left\{\begin{array}{l} \ 0'',281459 \sin(n't - \epsilon' - \varpi) \\ -\ 3'',843214 \sin(2n't - nt + 2\epsilon' - \epsilon - \varpi) \\ -\ 0'',376122 \sin(2n't - 3nt + 2\epsilon' - 3\epsilon + \varpi) \\ -\ 1'',607681 \sin(3n't - 2nt + 3\epsilon' - 2\epsilon - \varpi) \\ +\ 0'',280307 \sin(4n't - 3nt + 4\epsilon' - 3\epsilon - \varpi) \\ +\ 0'',168589 \sin(n't - 2nt + \epsilon' - 2\epsilon + \varpi) \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu'')\left\{\begin{array}{l} -\ 0'',427086 \sin(2n''t - nt + 2\epsilon'' - \epsilon - \varpi) \\ +\ 0'',225841 \sin(3n''t - 2nt + 3\epsilon' - 2\epsilon - \varpi). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.

Ces inégalités ont été calculées par les formules du n° 34. D'après les rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Mercure, Vénus et la Terre, les trois quantités $5n' - 2n$, $3n - n'$, et $2n - 4n''$, sont très peu considérables. Il faut donc avoir égard aux inégalités dépendantes des angles $5n't - 2nt$, $3n't - nt$ et $2nt - 4n''t$. On a trouvé ainsi :

$$\delta v = (1 + \mu') \left\{ \begin{array}{l} 1'',611738 \sin (5n't - 3nt + 5\epsilon' - 3\epsilon + 43^\circ 18' 32'') \\ - 0'',569837 \sin (3n't - nt + 3\epsilon' - \epsilon + 40^\circ 36' 35'') \end{array} \right\}$$
$$+ (1 + \mu'').0'',243715 \sin (4n''t - 2nt + 4\epsilon'' - 2\epsilon + 41^\circ 11' 46'').$$

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Les seules inégalités sensibles dépendantes des troisièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, résultent de l'action de Vénus et de la Terre sur Mercure. La première est relative à l'angle $2nt - 5n't$, et a été calculée par les formules du n° 35; la seconde est relative à l'angle $nt - 4n''t$, et a été calculée par les formules du n° 43. On a trouvé ainsi :

$$\delta v = (1 + \mu') \, 8'',087642 \sin (5n't - 2nt + 5\epsilon' - 2\epsilon + 30^\circ 13' 36'')$$
$$+ (1 + \mu'') \, 0'',557373 \sin (4n''t - nt + 4\epsilon'' - \epsilon - 16^\circ 59' 20'').$$

Les inégalités de la latitude sont insensibles et au-dessous de un dixième de seconde; on peut donc se dispenser d'y avoir égard.

CHAPITRE XIV.

Théorie de Vénus.

96. Si l'on nomme V' la longitude géocentrique de Vénus, et si l'on fait $\frac{r'}{r''} = \alpha$, l'équation (*a*) du n° 95 deviendra relativement à cette planète

$$\delta r' = - r''(1 - \alpha^2)\,\delta V'.$$

En prenant pour r' et r'' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura, n° 88, $\alpha = 0{,}72333230$, $r'' = 1$; en supposant donc $\delta V' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r' = \pm\, 0'',0000023652.$$

C'est la limite que doit atteindre une inégalité du rayon vecteur pour produire une inégalité d'une seconde sur la longitude géocentrique de Vénus. On pourra donc négliger toutes les inégalités du rayon vecteur qui seraient au-dessous de 0,000002. Quant aux inégalités de la longitude, nous négligerons, comme précédemment, celles qui ne s'éleveraient pas à un dixième de seconde.

Inégalités de Vénus indépendantes des excentricités.

$$\delta v' = (1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} \quad 4'',639773 \sin (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ + 10'',567639 \sin 2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - \;\; 6'',709876 \sin 3(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - \;\; 0'',977474 \sin 4(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - \;\; 0'',319958 \sin 5(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - \;\; 0'',134478 \sin 6(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{array}\right\}$$

$$+ (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} \quad 2'',927252 \sin (n^{\text{iv}}t - n't + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon') \\ - \;\; 0'',888587 \sin 2(n^{\text{iv}}t - n't + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon') \end{array}\right\}$$

$$+ (1+\mu^{\text{v}}).\; 0'',182197 \sin (n^{\text{v}}t - n't + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon'),$$

$$\delta r' = (1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} - 0'',0000002909 \\ + 0'',0000035486 \cos (n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ + 0'',0000152670 \cos 2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0'',0000129653 \cos 3(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \\ - 0'',0000022436 \cos 4(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') \end{array}\right\}$$

$$+ (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} - 0'',0000003145 \\ + 0'',0000049513 \cos (n^{\text{iv}}t - n't + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon') \\ - 0'',0000022185 \cos 2(n^{\text{iv}}t - n't + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon'). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v' = (1+\mu)\; 0'',849627 \sin 2(n't - nt + 2\varepsilon' - \varepsilon - \varpi)$$

$$+ (1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} - 0'',118420 \sin (n''t + \varepsilon'' - \varpi'') \\ + 0'',150204 \sin (2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi') \\ - 0'',105183 \sin (2n''t - n't + 2\varepsilon'' - \varepsilon' - \varpi'') \\ - 1'',426900 \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi') \\ + 4'',419290 \sin (3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi'') \\ - 0'',275773 \sin (4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi') \\ + 0'',878647 \sin (4n''t - 3n't + 4\varepsilon'' - 3\varepsilon' - \varpi'') \\ - 0'',636360 \sin (5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi') \\ + 2'',036590 \sin (5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'') \end{array}\right\}$$

$$- (1+\mu''')\; 0,754401 \sin (3n'''t - 2n't + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon' - \varpi''')$$

$$+ (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} - 1'',525383 \sin (n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ - 0'',323658 \sin (2n^{\text{iv}}t - 2n't + 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon' - \varpi') \\ + 0'',235752 \sin (2n^{\text{iv}}t - n't + 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon' - \varpi^{\text{iv}}) \\ - 0'',165806 \sin (3n^{\text{iv}}t - n't + 3\varepsilon^{\text{iv}} - 2\varepsilon' - \varpi^{\text{iv}}) \end{array}\right\}$$

$$- (1+\mu^{\text{v}})\; 0'',208962 \sin (n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varpi^{\text{v}}),$$

$$\delta r' = (1+\mu'')\; 0'',0000033689 \cos (5n''t - 4n't + 5\varepsilon'' - 4\varepsilon' - \varpi'').$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits de deux dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites.

D'après les rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, les quantités $4n' - 2n$, $5n'' - 3n'$, $4n'' - 2n'$ et $3n''' - n'$, sont très petites toutes les quatre; les inégalités qui dépendent des angles $4n't - 2nt$, $5n''t - 3n't$, $4n''t - 2n't$ et $3n'''t - n't$, croissent donc avec une grande lenteur, et pourraient, par la même raison, devenir sensibles. On a trouvé, en les calculant,

$$\begin{aligned}\delta v' = &- (1 + \mu)\ 0'',353878 \sin (4n't - 2nt + 4\varepsilon' - 2\varepsilon - 39^\circ 30' 30'') \\ &+ (1 + \mu'')\ 1'',392170 \sin (5n''t - 3n't + 5\varepsilon'' - 3\varepsilon' + 20^\circ 54' 26'') \\ &+ (1 + \mu''')\ 1'',384164 \sin (3n'''t - n't + 3\varepsilon''' - \varepsilon' + 65^\circ 53' 9'').\end{aligned}$$

L'inégalité dépendante de l'angle $4n'' - 2n'$ ne s'élevant pas à un dixième de seconde, nous avons cru inutile de la rapporter ici; il en est de même d'une inégalité dépendante de l'action de Mercure et de l'angle $3n't - nt$.

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons.

$$\delta v' = (1 + \mu)\ 1'',256877 \sin (2nt - 5n't + 2\varepsilon - 5\varepsilon' + 30^\circ 13' 37'').$$

Inégalités dépendantes des cinquièmes puissances et des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons.

$$\delta v' = (1 + \mu'')\ 2'',717796 \sin (13n''t - 8n't + 13\varepsilon'' - 8\varepsilon' - 40^\circ 44' 34'').$$

Cette inégalité, remarquée pour la première fois par M. Airy, a été calculée de la manière suivante.

On a d'abord déterminé par les formules du n° 44, l'inégalité correspondante relative à la Terre que nous donnerons plus loin, et en la multipliant par le facteur $-\frac{m''\sqrt{a''}}{m'\sqrt{a'}}$, on en a conclu l'inégalité précédente de Vénus.

Inégalités du mouvement de Vénus en latitude.

Au moyen des formules du n° 32, on a trouvé

$$\begin{aligned}\delta s' = (1+\mu'').&\left\{\begin{array}{l} 0'',115445 \sin(n''t+\epsilon''-\alpha') \\ +\,0'',289097 \sin(5n''t-4n't+5\epsilon''-4\epsilon'-\alpha')\end{array}\right\} \\ &-(1+\mu''')\,0'',102417 \sin(3n'''t-2n't+3\epsilon'''-2\epsilon'-\Pi''') \\ &-(1+\mu^{\text{IV}})\,0'',161410 \sin(2n^{\text{IV}}t-n't+2\epsilon^{\text{IV}}-\epsilon'-\Pi^{\text{IV}}),\end{aligned}$$

Π''' représentant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Mars, et Π^{IV} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Vénus. En vertu des valeurs rapportées n° 88, on trouve

$$\Pi''' = 100°\ 8'33'',$$
$$\Pi^{\text{IV}} = 61°23'28'';$$

les autres inégalités de la latitude étant insensibles et ne s'élevant pas à un centième de seconde, il est inutile d'en tenir compte.

CHAPITRE XV.

Théorie du mouvement de la Terre.

97. Soit V' la longitude géocentrique de Vénus, α étant supposé égal à $\frac{r'}{r''}$, V' sera fonction de α et de $(v''-v')$, et dans le cas du *maximum* de V', on aura, par le n° 95,

$$\delta V' = -\frac{\delta\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Si dans α on ne fait varier que r'', on aura $\delta\alpha = -\frac{\alpha\delta r''}{r''}$; par conséquent,

$$\delta r'' = r''\,\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\,\delta V'.$$

En faisant $\delta V' = \pm 1''$, et en prenant pour r' et r'' les moyennes distances de Vénus et de la Terre au Soleil, on aura $r''=1$, et $r'=0{,}72333230$; par conséquent,

$$\delta r'' = \pm\, 0{,}000003194.$$

Considérons maintenant une planète supérieure. Soit V''' la longitude géocentrique de Mars; en supposant

$\alpha = \frac{r''}{r'''}$, on aura, dans le cas du *maximum*,

$$\delta r'' = r''' \, (1 - \alpha^2) \, \delta \mathrm{V}''';$$

et en prenant pour r'' et r''' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil, ce qui donne

$$\begin{aligned} r''' &= 1{,}5236952, \\ \alpha &= 0{,}6563oo3o; \end{aligned}$$

en supposant $\delta \mathrm{V}''' = \pm 1$, on aura

$$\delta r''' = \pm \, 0{,}000004207.$$

On pourra donc négliger les inégalités de $\delta r''$ dont les coefficiens seraient au-dessous de $\pm\,0{,}000004$. Nous négligerons d'ailleurs, comme précédemment, les inégalités du mouvement en longitude et en latitude qui seraient au-dessous de un dixième de seconde.

Inégalités de la Terre indépendantes des excentricités.

$$\begin{aligned}
\delta v'' = (1 + \mu').&\left\{\begin{array}{l} \, 5'',044545 \sin (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\, 5'',735800 \sin 2(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\, 0'',692696 \sin 3(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ -\, 0'',214942 \sin 4(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{array}\right\} \\
+ (1 + \mu''').&\left\{\begin{array}{l} \, 0'',294244 \sin (n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ +\, 2'',398944 \sin 2(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \\ -\, 0'',145253 \sin 3(n'''t - n''t + \varepsilon''' - \varepsilon'') \end{array}\right\} \\
+ (1 + \mu^{\mathrm{iv}}).&\left\{\begin{array}{l} \, 7'',147235 \sin (n^{\mathrm{iv}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon'') \\ -\, 2'',707664 \sin 2(n^{\mathrm{iv}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon'') \\ -\, 0'',169865 \sin 3(n^{\mathrm{iv}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon'') \end{array}\right\} \\
+ (1 + \mu^{\mathrm{v}}).&\left\{\begin{array}{l} \, 0'',420317 \sin (n^{\mathrm{v}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{v}} - \varepsilon'') \\ -\, 0'',106186 \sin 2(n^{\mathrm{v}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{v}} - \varepsilon''), \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta r'' = (1 + \mu').&\left\{\begin{array}{l} -\, 0{,}0000057218 \cos (n\,t - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\ +\, 0{,}0000263449 \cos 2(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \end{array}\right\} \\
+ (1 + \mu^{\mathrm{iv}}).&\left\{\begin{array}{l} +\, 0{,}0000161375 \cos (n^{\mathrm{iv}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon'') \\ -\, 0{,}0000092122 \cos 2(n^{\mathrm{iv}}t - n''t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon''). \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$
\begin{aligned}
\delta v'' = (1+\mu').&\left\{\begin{array}{l}
-\,0'',123929 \sin(2n't - n''t + 2\epsilon' - \epsilon'' - \varpi'') \\
+\,0'',138746 \sin(2n''t - n't + 2\epsilon'' - \epsilon' - \varpi'') \\
-\,0'',160389 \sin(2n''t - n't + 2\epsilon'' - \epsilon' - \varpi') \\
-\,3'',504619 \sin(3n''t - 2n't + 3\epsilon'' - 2\epsilon' - \varpi'') \\
+\,1'',126067 \sin(3n''t - 2n't + 3\epsilon'' - 2\epsilon' - \varpi') \\
-\,2'',084316 \sin(4n''t - 3n't + 4\epsilon'' - 3\epsilon' - \varpi'') \\
+\,0'',685692 \sin(4n''t - 3n't + 4\epsilon'' - 3\epsilon' - \varpi') \\
+\,0'',206780 \sin(5n''t - 4n't + 5\epsilon'' - 4\epsilon' - \varpi'')
\end{array}\right\} \\
+ (1+\mu''').&\left\{\begin{array}{l}
-\,0'',756375 \sin(2n'''t - n''t + 2\epsilon''' - \epsilon'' - \varpi''') \\
+\,1'',475770 \sin(2n'''t - n''t + 2\epsilon''' - \epsilon'' - \varpi'') \\
+\,0'',456990 \sin(3n'''t - 2n''t + 3\epsilon''' - 2\epsilon'' - \varpi''') \\
+\,0'',557202 \sin(4n'''t - 3n''t + 4\epsilon''' - 3\epsilon'' - \varpi''')
\end{array}\right\} \\
+ (1+\mu^{iv}).&\left\{\begin{array}{l}
\,0'',306587 \sin(n^{iv}t + \epsilon^{iv} - \varpi'') \\
-\,2'',576181 \sin(n^{iv}t + \epsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-\,1'',514244 \sin(2n^{iv}t - n''t + 2\epsilon^{iv} - {}'' - \varpi'') \\
+\,0'',615064 \sin(2n^{iv}t - n''t + 2\epsilon^{iv} - \epsilon'' - \varpi^{iv}) \\
-\,0'',551129 \sin(3n^{iv}t - 2n''t + 3\epsilon^{iv} - 2\epsilon'' - \varpi^{iv}) \\
-\,0'',151141 \sin(2n''t - n^{iv}t + 2\epsilon'' - \epsilon^{iv} - \varpi^{iv})
\end{array}\right\} \\
+ (1+\mu^{v}).&\left\{\begin{array}{l}
-\,0'',308087 \sin(n^{v}t + \epsilon^{v} - \varpi^{v}) \\
-\,0'',130375 \sin(2n^{v}t - n''t + 2\epsilon^{v} - \epsilon'' - \varpi''),
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta r'' = &-(1+\mu').0,0000047495 \cos(4n''t - 3n't + 4\epsilon'' - 3\epsilon' - \varpi'') \\
&-(1+\mu^{iv}).0,0000030789 \cos(2n^{iv}t - n''t + 2\epsilon^{iv} - \epsilon'' - \varpi'').
\end{aligned}
$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

D'après les rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Vénus, la Terre et Mars, $5n'' - 3n'$ et $4n''' - 2n''$ sont de très petites quantités; les inégalités qui ont pour argument $5n''t - 3n't$ et $4n'''t - 2n''t$ croîtront donc avec une grande lenteur, et pourront, par cette raison, devenir sensibles. En les déterminant par les formules du nº 34, on a trouvé

$$
\begin{aligned}
\delta v'' = &(1+\mu').1'',073169 \sin(5n''t - 3n't + 5\epsilon'' - 3\epsilon' + 21^\circ\ 2'\ 18'') \\
&+ (1+\mu''').0'',684573 \sin(4n'''t - 2n''t + 4\epsilon''' - 2\epsilon'' + 67^\circ\ 48'\ 56'').
\end{aligned}
$$

Inégalités dépendantes des cinquièmes puissances et des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons.

L'inégalité de cet ordre, qui dépend de l'argument $13n''t - 8n't$, peut devenir sensible, parce que, en vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de Vénus et de la Terre, $13n'' - 8n'$ est une très petite quantité. En réduisant en nombres les formules du n° 44, on a trouvé (*)

$$\delta v'' = 2'',049154 \sin(8n't - 13n''t + 8\epsilon' - 13\epsilon'' + 41^\circ 14' 13'').$$

Inégalités du mouvement en latitude.

Par les formules du n° 86 du livre II, on a trouvé

$$\delta s'' = (1 + \mu').0'',223352 \sin(4n''t - 3n't + 4\epsilon'' - 3\epsilon' - \alpha')$$
$$+ (1 + \mu^{\text{IV}}).0'',166761 \sin(2n^{\text{IV}}t - n''t + 2\epsilon^{\text{IV}} - \epsilon' - \alpha^{\text{IV}}).$$

Ce sont les seules inégalités sensibles du mouvement de la Terre en latitude.

Des variations séculaires de l'orbe terrestre, de l'équateur et de la longueur de l'année.

98. Dans le n° 91 nous avons donné les variations séculaires de l'excentricité, du périhélie et des quantités qui déterminent la position de l'orbe terrestre, en ayant égard à la première puissance du temps. Mais la grande influence de ces variations sur tous les phénomènes célestes, puisque c'est au plan de l'écliptique que les astronomes rapportent toutes leurs observations, nous obligent à les déterminer avec plus de

(*) *Connaissance des Tems* pour l'année 1836.

précision, et à considérer les termes de leurs valeurs dépendans du carré du temps.

En déterminant par le n° 63, livre II, les différences secondes des quatre quantités $\frac{de^{\text{IV}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{IV}}}{dt}$, $\frac{de^{\text{V}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{V}}}{dt}$, et en adoptant les valeurs des masses planétaires du n° 87, on a trouvé

$$\frac{d^2e''}{dt^2} = -0'',0000644034, \quad \frac{d^2\varpi''}{dt^2} = +0'',0001533501,$$

$$\frac{d^2p''}{dt^2} = 0'',0000399136, \quad \frac{d^2q''}{dt^2} = 0'',0000147352 6.$$

En joignant ces valeurs à celles de $\frac{de''}{dt}$, $\frac{d\varpi''}{dt}$, etc., données n° 91, on a conclu, n° 63, livre II, pour un temps quelconque t, les expressions suivantes de e'', ϖ'', p'' et q'' :

$$\begin{aligned}
e'' &= e''_{,} - 0'',0903383t - 0'',00000322017t^2, \\
\varpi'' &= \varpi''_{,} + 11'',174815t + 0'',0000766750t^2, \\
p'' &= 0'',064960t + 0'',0000199568t^2, \\
q'' &= -0'',488566t + 0'',0000073676 3t^2;
\end{aligned}$$

les valeurs de $e''_{,}$, $\varpi''_{,}$, daus les seconds membres, se rapportant à l'origine du temps t, c'est-à-dire à l'époque de 1800.

Nous avons donné dans le n° 92 les valeurs finies de p'' et q'', ainsi que celles des quantités qui déterminent e'' et ϖ''; ces valeurs se présentent sous la forme suivante, $\Sigma B \sin(gt + 6)$ et $\Sigma B \cos(gt + 6)$, et s'appliquent à un temps quelconque, avant ou après celui que l'on a choisi pour époque. Cependant on a vu que les difficultés du calcul qu'exige leur

détermination, et l'incorrection qui peut exister encore dans les valeurs de quelques-unes des masses planétaires, doivent laisser quelque incertitude sur la précision des résultats ainsi obtenus. C'est pourquoi il est préférable, pour la détermination des élémens de l'orbe terrestre, d'adopter les précédentes formules, qui ne peuvent, il est vrai, s'étendre qu'à mille ou douze cents ans avant et après l'époque qu'on a choisie, mais qu'il sera facile de corriger et de rapporter à une nouvelle époque à mesure que le temps fera mieux connaître les masses des planètes (*). Les changemens que ces masses ont subi dans ces derniers temps nous engagent à reprendre ici les formules de la précession des équinoxes et des variations de l'obliquité de l'équateur, soit par rapport à l'écliptique fixe, soit par rapport à l'écliptique vraie, que nous avons présentées dans le n° 34 du livre IV. Nous avions adopté alors les valeurs de p'' et q'' calculées par M. Bouvard, mais ces valeurs diffèrent, comme on peut le voir, de celles qui ont été rapportées plus haut; et d'ailleurs, comme nous avons choisi pour époque dans la théorie des perturbations planétaires l'année 1800, il est nécessaire de rapporter aussi à cette époque les variations de l'écliptique et de l'équateur.

Les valeurs finies de p'' et q'' se présentant, la première sous la forme de $\Sigma.\text{B}\sin(bt+6)$, la seconde sous la forme de $\Sigma.\text{B}\cos(bt+6)$, si l'on développe, comme dans le n° 33, livre V, ces quan-

(*) *Voir* les notes à la fin du volume.

tites en négligeant les puissances du temps supérieures à la seconde, et qu'on les compare ensuite à celles de p'' et q'' données plus haut, on trouve

$$\Sigma.\mathrm{B}b\,\sin\mathcal{C} = 0'',488566, \qquad \Sigma.\mathrm{B}b\,\cos\mathcal{C} = 0'',064960,$$
$$\Sigma.\mathrm{B}b^2\sin\mathcal{C} = -0'',0000399136, \qquad \Sigma.\mathrm{B}b^2\cos\mathcal{C} = -0'',0000147352б.$$

Maintenant, en nommant θ l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique fixe de 1800, θ' l'obliquité de l'écliptique vraie, ψ la précession des équinoxes par rapport à l'écliptique fixe, et ψ' la précession relative à l'écliptique vraie, et en ne considérant que les variations séculaires, on aura, n° 34, livre IV,

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= h + \tfrac{1}{2}t^2\Sigma.\mathrm{B}lb\cos\mathcal{C},\\
\theta' &= h - t\Sigma.\mathrm{B}b\,\sin\mathcal{C} - \tfrac{1}{2}t^2\Sigma.\mathrm{B}\,(l+b)\,b\cos\mathcal{C},\\
\psi &= lt - t^2\cot 2h\Sigma.lb\sin\mathcal{C},\\
\psi' &= t(l - \cot h\Sigma.\mathrm{B}b\cos\mathcal{C}) + t^2\left(\frac{1}{\sin 2h}\Sigma.\mathrm{B}lb\sin\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}\cot h\Sigma.\mathrm{B}b^2\sin\mathcal{C}\right).
\end{aligned}\right\}(o)$$

h étant l'obliquité de l'équateur au commencement de 1800, et lt le moyen mouvement des équinoxes à la même époque, rapporté à l'écliptique fixe.

D'après les recherches les plus récentes de M. Bessel, la précession annuelle rapportée à l'écliptique vraie était, en 1800, égale à 50″22350; on aura donc ainsi

$$l - \cot h\ \Sigma.\mathrm{B}b\cos\mathcal{C} = 50'',22350;$$

l'obliquité de l'écliptique était, à la même époque, de 23° 27′ 54″8; d'où l'on a conclu

$$h = 23°\,27'\,54'',8, \qquad l = 50'',37315.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles des quantités $\Sigma.\mathrm{B}b\sin\mathcal{C}$, $\Sigma.\mathrm{B}b\cos\mathcal{C}$, $\Sigma.\mathrm{B}b^2\sin\mathcal{C}$, et $\Sigma.\mathrm{B}b^2\cos\mathcal{C}$

données plus haut, les formules (o) deviennent

$$\theta = 23^\circ\, 27'\, 54'',8 + t^2\, 0'',0000079313,$$
$$\theta' = 23^\circ\, 27'\, 54'',8 - t\, 0'',488566 - t^2\, 0'',00000564 50,$$
$$\psi = t\, 50'',37315 - t^2\, 0'',0001043091,$$
$$\psi' = t\, 50'',22350 + t^2\, 0'',0001097248.$$

Ces formules diffèrent peu de celles que nous avons données dans le n° 34 du livre IV; mais une erreur facile à réparer s'était glissée dans celles-ci : nous y avons supposé la précession moyenne des équinoxes relative à l'écliptique vraie égale, en 1750, à 50'',37572, tandis que c'était la valeur de la précession moyenne relative à l'écliptique fixe (*).

Les formules précédentes peuvent s'étendre de mille à douze cents ans avant et après l'instant que l'on a choisi pour époque; on peut même les étendre aux plus anciennes observations qui nous soient parvenues, vu leur imperfection.

L'angle θ' représente l'obliquité moyenne de l'écliptique. Cette obliquité, conclue de l'observation des solstices d'été, faite à Paris, dans les années 1812, 1813 et 1814, par MM. Arago et Mathieu, en prenant leur résultat moyen et 9'',40 pour le coefficient de la nutation, était, en 1813, égale à

$$23^\circ\, 27'\, 49'',28.$$

En faisant $t = 12,5$ dans l'expression précédente de θ', on trouve

$$\theta' = 23^\circ\, 27'\, 48'',69.$$

(*) *Voir* l'errata à la fin du volume.

La différence entre le calcul et l'observation serait donc de 0″,59. Cette différence ne serait que de —0″,15 en calculant θ' par les formules du nº 34 du livre IV, mais il faut des observations plus nombreuses, et faites à des intervalles plus considérables, pour pouvoir juger avec quelque certitude de la précision des formules.

L'année sidérale est constante et égale en jours moyens à 365^j,2563744l7; l'année tropique est égale à l'année sidérale, moins le temps que le Soleil met à décrire l'arc de la précession. Les valeurs précédentes donnent ainsi, pour la longueur de l'année tropique,

$$365^j,242219746 - t.0,0000000618482;$$

d'où il suit que du temps d'Hypparque, c'est-à-dire cent vingt-huit ans avant l'ère chrétienne, la durée de l'année tropique était de 10″,28 plus longue qu'elle ne l'était en 1800; l'obliquité de l'écliptique était alors de 16′ 15″,771 plus grande qu'elle ne l'est aujourd'hui.

Comparons aux formules précédentes l'observation de Tcheou-Kong (*) que nous avons citée dans le livre IV, et qui donne pour l'année correspondante à 1100 ans avant notre ère l'obliquité de l'écliptique égale à 23° 54′ 2″,5. Si l'on fait $t = -2850$ dans l'expression de θ', cette valeur est alors égale à 23°50′44″, ce qui ne diffère que de 3′ 19″ de l'observation chinoise.

Laplace, dans la *Mécanique céleste*, a calculé l'ex-

(*) *Connaissance des Tems* pour l'année 1827, page 237.

pression de ψ' pour deux époques remarquables : celle où le grand axe de l'orbe solaire coïncidait avec la ligne des équinoxes, et celle où le grand axe de l'orbe solaire était perpendiculaire à cette ligne. A la première époque, l'équinoxe vrai et l'équinoxe moyen coïncidaient; dans la seconde, le solstice vrai coïncidait avec le solstice moyen. Voyons ce que donnent à cet égard les formules précédentes. Si l'on fait $t = -5907$, par l'expression de ψ', on a

$$\psi' = -81^{\circ}\,20'\,42'';$$

cette quantité prise avec un signe contraire sera la longitude de l'équinoxe de 1800 par rapport à l'équinoxe correspondant au temps t. L'expression précédente de ϖ'' donne pour la longitude du périhélie de l'orbe terrestre, comptée de l'équinoxe fixe de 1800 :

$$\varpi'' = 81^{\circ}\,20'\,31''.$$

La somme de ces valeurs prises avec leur signe sera la longitude du même périhélie comptée de l'équinoxe de l'année 4107 avant l'ère chrétienne, époque qui correspond à la valeur que nous avons supposée au temps t; cette longitude était donc alors de 11″. La plupart des chronologistes placent la création du Monde vers l'an 4004 avant l'ère chrétienne; l'époque où le grand axe de l'orbe solaire coïncidait avec l'intersection de l'écliptique et de l'équateur a donc précédé, d'après nos formules, d'un siècle environ la création du Monde.

La seconde époque, celle où le grand axe de l'orbe terrestre était perpendiculaire à la ligne des équinoxes

et où par conséquent le solstice vrai se confondait avec le solstice moyen, est beaucoup plus voisine de nous, et remonte seulement à peu près à l'an 1250. En effet, si dans les formules précédentes on fait $t = -555$, on trouve

$$\psi' = -\ 7^\circ 44' 0'',$$
$$\omega'' = \ 97^\circ 45' 47''.$$

En ajoutant ces deux quantités prises avec leur signe, on aura $90^\circ 1' 47''$ pour la longitude du périhélie de l'orbe solaire comptée de l'équinoxe mobile; en sorte que l'instant où cette longitude était de 90° répond à peu près, d'après nos formules, à l'année 1245; mais l'incertitude des élémens employés dans le calcul, comme l'observe Laplace, peut en laisser une de quelques années dans ce résultat.

CHAPITRE XVI.

Théorie de Mars.

99. Si l'on nomme V''' la longitude géocentrique de Mars, et si l'on fait $\alpha = \frac{r''}{r'''}$, dans le cas du *maximum* de V''', on aura

$$\delta\alpha = (1 - \alpha^2)\,\delta V'''.$$

La valeur de α en ne faisant varier que r''' donne, $\delta\alpha = -\frac{r''\delta r'''}{r'''^2}$; on aura donc

$$\delta r''' = -\frac{r'''^2}{r''}(1 - \alpha^2)\,\delta V''',$$

si l'on prend pour r'' et r''' les moyennes distances de la Terre et de Mars au Soleil ; ce qui donne $r'' = 1$, $r''' = 1,52369352$, $\alpha = 0,65630030$. En supposant $\delta V''' = \pm 1''$, on aura

$$\delta r''' = \mp 0,0000064074.$$

Nous négligerons donc les inégalités du rayon vecteur dont les coefficiens seraient au-dessous de 0,000006. Quant aux inégalités de la longitude, nous négligerons toutes celles qui ne s'éleveraient pas à un dixième de seconde.

Inégalités de Mars, indépendantes des excentricités.

$$\delta v''' = (1 + \mu')\, 0'',199493 \sin (n't - n'''t + \epsilon' - \epsilon''')$$

$$+ (1 + \mu'').\left\{\begin{array}{l} \quad 6'',464717 \sin \;(n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ - 0'',89603 \;\sin 2(n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \\ - 0'',169287 \sin 3(n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} \quad 24'',746162 \sin \;(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \\ -13'',767931 \sin 2(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \\ - 1'',195032 \sin 3(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \\ - 0'',174926 \sin 4(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} \quad 1'',285367 \sin \;(n^{\text{v}}t - n'''t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon''') \\ - 0'',424390 \sin 2(n^{\text{v}}t - n'''t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon'''), \end{array}\right\}$$

$$\delta r''' = (1 + \mu'').\left\{\begin{array}{l} \quad 0'',0000022071 \\ - 0'',0000173497 \cos (n''t - n'''t + \epsilon'' - \epsilon''') \end{array}\right\}$$

$$+ (1 + \mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} - 0'',0000067001 \\ + 0'',0000794170 \cos (n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \\ - 0'',0000687923 \cos 2(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''') \\ - 0'',0000070256 \cdot \cos 3(n^{\text{iv}}t - n'''t + \epsilon^{\text{iv}} - \epsilon'''). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v = (1 + \mu').\left\{\begin{array}{l} \quad 1'',034565 \sin (2n'''t - n't + 2\epsilon''' - \epsilon' - \varpi''') \\ - 0'',239746 \sin (2n'''t - n't + 2\epsilon''' - \epsilon' - \varpi') \end{array}\right\}$$

$$+ (: + \mu^{\text{iv}}).\left(\begin{array}{l} \quad 0'',647772 \sin \;(n''t + \epsilon'' - \varpi''') \\ - 0'',124732 \sin (2n''t - n'''t + 2\epsilon'' - \epsilon''' - \varpi''') \\ - 9'',378124 \sin (2n'''t - n''t + 2\epsilon''' - \epsilon'' - \varpi''') \\ + 4'',750041 \sin (2n'''t - n''t + 2\epsilon''' - \epsilon'' - \varpi'') \\ - 0'',604175 \sin (3n'''t - 2n''t + 3\epsilon''' - 2\epsilon'' - \varpi'') \\ + 0'',784404 \sin (3n'''t - 2n''t + 3\epsilon''' - 2\epsilon'' - \varpi'') \\ + 0'',578992 \sin (4n'''t - 3n''t + 4\epsilon''' - 3\epsilon'' - \varpi''') \\ + 0'',111193 \sin (5n'''t - 4n''t + 5\epsilon''' - 4\epsilon'' - \varpi''') \end{array}\right)$$

$$+ (1 + \mu^{\text{iv}}).\left(\begin{array}{l} \quad 5'',571930 \sin (\, n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{iv}} - \varpi''') \\ - 5'',443704 \sin (\, n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ -23'',902520 \sin (2n^{\text{iv}}t - n'''t + 2\epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''' - \varpi''') \\ + 2'',630157 \sin (2n^{\text{iv}}t - n'''t + 2\epsilon^{\text{iv}} - \epsilon''' - \varpi^{\text{iv}}) \\ + 2'',330851 \sin (3n^{\text{iv}}t - 2n'''t + 3\epsilon^{\text{iv}} - 2\epsilon''' - \varpi''') \\ - 3'',619980 \sin (3n^{\text{iv}}t - 2n'''t + 3\epsilon^{\text{iv}} - 2\epsilon''' - \varpi^{\text{iv}}) \\ + 0'',223422 \sin (4n^{\text{iv}}t - 3n'''t + 4\epsilon^{\text{iv}} - 3\epsilon''' - \varpi''') \\ - 0'',357680 \sin (4n^{\text{iv}}t - 3n'''t + 4\epsilon^{\text{iv}} - 3\epsilon''' - \varpi^{\text{iv}}) \\ - 2'',911300 \sin (2n'''t - n^{\text{iv}}t + 2\epsilon''' - \epsilon^{\text{iv}} - \varpi''') \\ - 0'',207442 \sin (2n'''t - n^{\text{iv}}t + 2\epsilon''' - \epsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ + 1'',880721 \sin (3n'''t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon''' - 2\epsilon^{\text{iv}} - \varpi''') \\ + 0'',201257 \sin (4n'''t - 3n^{\text{iv}}t + 4\epsilon''' - 3\epsilon^{\text{iv}} - \varpi''') \end{array}\right)$$

$$+(1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} \quad 0'',137834 \sin\ (n^{v}t+\varepsilon^{v}-\varpi''') \\ -0'',665765 \sin\ (n^{v}t+\varepsilon^{v}-\varpi^{v}) \\ -1'',717676 \sin\ (2n^{v}t-n'''t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon'''-\varpi''') \\ +0'',126266 \sin\ (2n^{v}t-n'''t+2\varepsilon^{v}-\varepsilon'''-\varpi^{v}) \\ +0'',150323 \sin\ (2n'''t-n^{v}t+2\varepsilon'''-\varepsilon^{v}-\varpi'''). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

Les inégalités suivantes sont les seules de cette espèce qui paraissent devoir être sensibles, en vertu des rapports qui existent entre les moyens mouvemens de Vénus, la Terre, Mars et Jupiter :

$$\delta v=-(1+\mu').6'',578380 \sin(3n'''t-n't+3\varepsilon'''-\varepsilon'+65^\circ\,26'\,15'')$$

$$-(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} \quad 1'',308452 \sin(3n'''t-n''t+3\varepsilon'''-\varepsilon''+73^\circ\,11'\,55'') \\ +4'',043114 \sin(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''+67^\circ\,49'\,0'') \\ +2'',465976 \sin(5n'''t-3n''t+5\varepsilon'''-3\varepsilon''+68^\circ\,23'\,0'') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l} -0'',468575 \sin(n^{iv}t+n'''t+\varepsilon^{iv}+\varepsilon'''-53^\circ\,7'\,47'') \\ -1'',462209 \sin(2n^{iv}t+2\varepsilon^{iv}+60^\circ\,7'\,2'') \\ +1'',311633 \sin(n^{iv}t-n'''t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon'''+54^\circ\,41'\,31''). \end{array}\right\}$$

On peut réunir la dernière de ces inégalités à l'inégalité indépendante des excentricités

$$(1+\mu^{iv})\ 24'',746162 \sin(n^{iv}t-n'''t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon''');$$

leur somme donnera l'inégalité suivante

$$(1+\mu^{iv})\ 25'',527482 \sin(n^{iv}t-n'''t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon'''+2^\circ\,24'\,11'').$$

Pour les inégalités correspondantes du rayon vecteur, on aura

$$\delta r=(1+\mu'').\left\{\begin{array}{l} +0,0000064979 \cos(4n'''t-2n''t+4\varepsilon'''-2\varepsilon''-58^\circ\,51'\,50'') \\ -0,0000069405 \cos(5n'''t-3n''t+5\varepsilon'''-2\varepsilon''+68^\circ\,37'\,28'') \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l} \quad 0,0000081004 \cos(2nt+2\varepsilon+60^\circ\,17'\,52'') \\ +0,0000042007 \cos(n^{iv}t-n'''t+\varepsilon^{iv}-\varepsilon'''+59^\circ\,8'\,57''). \end{array}\right\}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'i-

négalité

$$(1 + \mu^{\text{iv}})\, 0{,}0000794170 \cos (n^{\text{iv}}t - n^{\text{III}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{III}})\,;$$

c'est par cette raison que nous l'avons conservée, quoiqu'elle tombe au-dessous de la limite assignée aux inégalités du rayon vecteur.

La somme de ces deux inégalités donne la suivante :

$$(1 + \mu^{\text{iv}})\; 0{,}0000816532 \cos (n^{\text{iv}}t - n^{\text{III}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{III}} + 2^{\circ}\, 31'\, 54'').$$

Le mouvement de Mars en latitude n'est affecté que d'inégalités très peu sensibles. En désignant par Π^{iv} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur celle de Mars, les seules de ces inégalités qui, s'élèvent à un centième de seconde, sont les suivantes :

$$\delta s^{\text{III}} = (1 + \mu^{\text{iv}}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad 0'',095575 \sin (n^{\text{iv}} + \varepsilon^{\text{iv}} - \Pi^{\text{iv}}) \\ + 0'',403269 \sin (2n^{\text{iv}} - n^{\text{III}}t + 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{III}} - \Pi^{\text{iv}}). \end{array} \right\}$$

on a d'ailleurs

$$\gamma^{\text{iv}} = 1^{\circ}24'45'',$$
$$\Pi^{\text{iv}} = 2^{\circ}57'31'';$$

en nommant γ^{iv} l'inclinaison mutuelle des deux orbites de Mars et de Jupiter.

CHAPITRE XVII.

Théorie de Jupiter.

100. Jupiter et Saturne sont de toutes les planètes, celles qui sont assujetties, en vertu de leurs attractions mutuelles, aux inégalités les plus considérables. Leur théorie mérite donc une attention particulière.

L'équation

$$\delta a = (1 - a^2)\,\delta V^{\text{IV}},$$

en supposant $a = \frac{r''}{r^{\text{IV}}}$ et en ne faisant varier que r^{IV} dans a, donne

$$\delta r^{\text{IV}} = -\frac{r^{\text{IV}2}}{r''}(1 - a^2)\,\delta V^{\text{IV}}.$$

Si l'on prend pour r'' et r^{IV} les moyennes distances de la Terre et de Jupiter au Soleil, et si dans le cas du *maximum* on suppose $\delta V^{\text{IV}} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{\text{IV}} = \mp\, 0{,}000126304.$$

On peut donc négliger les inégalités du rayon vecteur qui sont au-dessous de $\mp 0{,}00013$. Quant aux inégalités du mouvement de Jupiter en longitude et en latitude, nous négligerons, comme précédem-

ment, celles qui seraient au-dessous d'un dixième de seconde.

Inégalités de Jupiter indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{\text{iv}} = (1 + \mu'').0'',111771 \sin\ (n''t - n^{\text{iv}}t + \epsilon'' - \epsilon^{\text{iv}})$$

$$+(1 + \mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 79'',213453 \sin\ (n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -195'',524778 \sin 2(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 16'',322341 \sin 3(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 3'',753996 \sin 4(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 1'',157972 \sin 5(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',409804 \sin 6(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',163496 \sin 7(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\}$$

$$+(1 + \mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l} 1'',144830 \sin\ (n^{\text{vi}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{vi}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -\ 0'',585549 \sin 2(n^{\text{vi}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{vi}} - \epsilon^{\text{iv}}), \end{array}\right\}$$

$$\delta r^{\text{iv}} = (1 + \mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} -0,0000593620 \\ +0,0006474651 \cos\ (n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -0,0027707579 \cos 2(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}) \\ -0,0002890087 \cos 3(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}}). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

Plusieurs de ces inégalités étant considérables, on a dû avoir égard aux variations séculaires de leurs coefficiens. Pour cela, on a calculé ces inégalités pour deux époques différentes, en tenant compte de la variation des excentricités e^{iv} et e^{v} durant cet intervalle, et l'on en a déduit, par la méthode du n° 66, la variation du coefficient de l'inégalité pour un temps t quelconque. On verra plus loin qu'en tenant compte du carré de la force perturbatrice, on a

$$\delta e^{\text{iv}} = 0'',31409, \qquad \delta e^{\text{v}} = -\,0'',73651.$$

En n'ayant égard qu'aux variations des coefficiens qui surpassent 60″ dans l'expression de δv^{iv}, on a

trouvé.

$$\delta v^{iv} = (1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l}
\ 8'',249070 \sin(n^{v}t + \varepsilon^{v} - \varpi^{iv}) \\
-\ 9'',259026 \sin(n^{v}t + \varepsilon^{v} - \varpi^{v}) \\
-(132'',59600 + t0'',00419232)\sin(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
+\ 54'',101900 \sin(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
-\ 42'',604479 \sin(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
+(81'',144700 - t0,00516008)\sin(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
+\ 7'',594415 \sin(4n^{v}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-14'',930790 \sin(4n^{v}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
+\ 1'',003985 \sin(5n^{v}t - 4n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 4\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-\ 2'',657290 \sin(5n^{v}t - 4n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 4\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
+\ 0'',390248 \sin(6n^{v}t - 5n^{iv}t + 6\varepsilon^{v} - 5\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',872467 \sin(6n^{v}t - 5n^{iv}t + 6\varepsilon^{v} - 5\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
+\ 0'',143044 \sin(7n^{v}t - 6n^{iv}t + 7\varepsilon^{v} - 6\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',311034 \sin(7n^{v}t - 6n^{iv}t + 7\varepsilon^{v} - 6\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
-\ 4'',990673 \sin(2n^{iv}t - n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{v} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',544263 \sin(2n^{iv}t - n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - \varepsilon^{v} - \varpi^{v}) \\
+12'',339020 \sin(3n^{iv}t - 2n^{v}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{v} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',336643 \sin(3n^{iv}t - 2n^{v}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{v} - \varpi^{v}) \\
+\ 1'',237154 \sin(4n^{iv}t - 3n^{v}t + 4\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{v} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',165161 \sin(4n^{iv}t - 3n^{v}t + 4\varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{v} - \varpi^{v}) \\
+\ 0''.341737 \sin(5n^{iv}t - 4n^{v}t + 5\varepsilon^{iv} - 4\varepsilon^{v} - \varpi^{iv})
\end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{vi}).\left\{\begin{array}{l}
\ 0'',134677 \sin(n^{vi}t + \varepsilon^{vi} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0'',255578 \sin(n^{vi}t + \varepsilon^{vi} - \varpi^{vi}) \\
-\ 0'',581295 \sin(2n^{vi}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
+\ 0'',111548 \sin(2n^{vi}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{vi} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{vi}) \\
-\ 0'',139025 \sin(3n^{vi}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{vi} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{vi}),
\end{array}\right\}$$

$$\delta r^{iv} = (1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l}
-\ 0,000279513 \cos(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
+\ 0,090161474 \cos(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
-\ 0,000438528 \cos(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
+\ 0,000865468 \cos(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
+\ 0,000120471 \cos(4n^{v}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\
-\ 0,000231907 \cos(4n^{v}t - 3n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}) \\
-\ 0,000128802 \cos(3n^{iv}t - 2n^{v}t + 3\varepsilon^{iv} - 2\varepsilon^{v} - \varpi^{iv}).
\end{array}\right)$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons.

101. La plus considérable des inégalités de cet ordre est celle qui résulte de l'action de Saturne et qui dépend de l'angle $5n^{v}t - 3n^{iv}t$. Comme $5n^{v} - 2n^{iv}$ est

une très petite quantité, à cause du rapport de commensurabilité qui existe entre les moyens mouvemens de ces deux planètes, l'angle $3n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t$ diffère très peu de $n^{\text{iv}}t$; on a donc fait usage pour calculer cette inégalité de la formule (A) du n° 34 et à cause de la grandeur de son coefficient on a eu égard dans son expression, à la variation des élémens de l'orbite de Jupiter, par la méthode du n° 29.

On a trouvé, par le n° 38, cette inégalité en 1800 égale à

$$- \ 84'',93800 \sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}} + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}}),$$
$$+ \ 136'',95310 \cos(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}}),$$

et en 2000 égale à

$$- \ 77'',46803 \sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}}),$$
$$+ \ 138'',13567 \cos(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}});$$

d'où l'on a conclu, pour un temps quelconque, cette inégalité égale à

$$-(84'',93800 - t\ 0'',0393498) \sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}}),$$
$$+(138'',13567 + t\ 0'',0059128) \cos(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}}),$$

ou bien, en réduisant ces deux termes en un seul par la méthode du n° 30,

$$\delta v^{\text{iv}} = -(1+\mu^{\text{v}})(161'',14937 - t\ 0'',013826) \sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}} - 58^{\circ}\ 11'\ 34'' - t.45'',310).$$

Les autres inégalités du mouvement de Jupiter en longitude dépendantes du carré des excentricités, ont été déterminées par les formules (A), (B), (C) et (D) du n° 34; on a trouvé ainsi

$$\delta v^{\text{IV}} = (1+\mu^{\text{V}}) \left\{ \begin{array}{l} \;\;\, 0'',743405 \sin(n^{\text{V}}t + n^{\text{IV}}t + \epsilon^{\text{V}} + \epsilon^{\text{IV}} + 67^\circ\, 4'\, 10'') \\ -\; 5'',336306 \sin(2n^{\text{V}}t + 2\epsilon^{\text{V}} + 15^\circ\, 56'\, 24'') \\ +11'',214818 \sin(3n^{\text{V}}t - n^{\text{IV}}t + 3\epsilon^{\text{V}} - \epsilon^{\text{IV}} + 79^\circ\, 39'\, 48'') \\ -17'',289891 \sin(4n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 4\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}} - 57^\circ\, 12'\, 25'') \\ +\; 1'',575570 \sin(6n^{\text{V}}t - 4n^{\text{IV}}t + 6\epsilon^{\text{V}} - 4\epsilon^{\text{IV}} - 54^\circ\, 25'\, 48'') \\ +\; 2'',368801 \sin(n^{\text{V}}t - n^{\text{IV}}t + \epsilon^{\text{V}} - \epsilon^{\text{IV}} + 43^\circ\, 17'\, 1'') \\ -\; 6'',014774 \sin(2n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 2\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}} + 42^\circ\, 40'\, 44''). \end{array} \right\}$$

Les deux dernières inégalités réunies aux deux suivantes qui leur correspondent, et qui dépendent des simples excentricités

$$79'',219453 \sin(n^{\text{V}}t - n^{\text{IV}}t + \epsilon^{\text{V}} - \epsilon^{\text{IV}}),$$
$$-195'',524778 \sin(2n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 2\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}),$$

donnent celles-ci :

$$(1+\mu^{\text{V}}).\left\{ \begin{array}{l} \;\;\, 84'',628920 \sin(n^{\text{V}}t - n^{\text{IV}}t + \epsilon^{\text{V}} - \epsilon^{\text{IV}} + 1^\circ\, 8'\, 52'') \\ -209'',098191 \sin(2n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 2\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}} + 1^\circ\, 9'\, 57''). \end{array} \right\}$$

La seule des inégalités du rayon vecteur qui dépasse la limite que nous leur avons assignée est la suivante :

$$\delta r^{\text{IV}} = -(1+\mu^{\text{V}})\,(0,002019705 - t\; 0,0000000005092) \cos(5n^{\text{V}}t - 3n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 3\epsilon^{\text{IV}} - 58^\circ\, 6'\, 51'' - t\, 44'',410).$$

Grande inégalité de Jupiter produite par l'action de Saturne, et dépendante du cube et des produits de trois et de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites, ainsi que du carré de la force perturbatrice.

Les grandes inégalités que produisent dans le mouvement de Jupiter et de Saturne, leurs actions réciproques, en vertu du rapport qui existe entre leurs moyens mouvemens, sont au moins du troisième ordre relativement aux excentricités et aux inclinaisons, et leur importance exige qu'on ait égard dans leur

détermination aux cinquièmes puissances de ces quantités et même aux termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices.

On a d'abord déterminé la partie de la grande inégalité de Jupiter dépendante des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons au moyen des formules du n° 38. En partant des élémens rapportés n° 88, on a trouvé par le n° 71 :

$$
\begin{aligned}
a^{v}M^{(0)} &= -\ m^{v}1{,}1620283,\\
a^{v}M^{(1)} &= \quad m^{v}5{,}8070750,\\
a^{v}M^{(2)} &= -\ m^{v}9{,}6074688,\\
a^{v}M^{(3)} &= \quad m^{v}5{,}2439100,\\
a^{v}N^{(0)} &= \quad m^{v}0{,}6385781,\\
a^{v}N^{(1)} &= -\ m^{v}0{,}3320740;
\end{aligned}
$$

De là, on a conclu pour 1800

$$
\begin{aligned}
a^{v}P &= -\ 0{,}0000520640,\\
a^{v}P' &= \quad 0{,}0010280971.
\end{aligned}
$$

Il a fallu ensuite n° 66, déterminer les mêmes quantités pour 2300 et pour 2800. Pour cela il fallait connaître les élémens des orbites de Jupiter et de Saturne pour ces deux époques.

Nous avons donné n° 91, les variations séculaires de ces quantités dépendantes de l'action des planètes, mais il est encore nécessaire d'avoir égard aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice. Cette partie se calculera par le moyen des formules du n° 53. On a trouvé ainsi :

$$\delta\varpi^{\text{iv}} = \quad t.0'',330562,$$
$$\delta e^{\text{iv}} = \quad t.0'',048963,$$
$$\delta\varpi^{\text{v}} = \quad t.3'',037112,$$
$$\delta e^{\text{v}} = -\, t.0'',096247.$$

En différentiant ces valeurs, les quantités $\frac{d.\delta\varpi^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{d.\delta e^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{d.\delta\varpi^{\text{v}}}{dt}$, $\frac{d.\delta e^{\text{v}}}{dt}$, sont les accroissemens de $\frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{de^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt}$, $\frac{de^{\text{v}}}{dt}$, qui dépendent du carré de la force perturbatrice; en ajoutant donc aux variations déterminées n° 91, les coefficiens du temps t, dans les expressions précédentes, on aura les valeurs complètes de ces quatre quantités. En négligeant les corrections des masses planétaires, on trouve ainsi pour 2300;

$$\frac{de^{\text{iv}}}{dt} = 0'',314088, \qquad \frac{de^{\text{v}}}{dt} = -\, 0'',736506,$$
$$\frac{d\varpi^{\text{iv}}}{dt} = 6'',683122, \qquad \frac{d\varpi^{\text{v}}}{dt} = \quad 19'',055044.$$

On a calculé les mêmes quantités pour 2000, et en désignant par $\frac{de_{\prime}^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{d\varpi_{\prime}^{\text{iv}}}{dt}$, $\frac{de_{\prime}^{\text{v}}}{dt}$, $\frac{d\varpi_{\prime}^{\text{v}}}{dt}$ ce qu'elles deviennent pour cette époque, on a trouvé

$$\frac{de_{\prime}^{\text{iv}}}{dt} = 0'',310983, \qquad \frac{de_{\prime}^{\text{v}}}{dt} = -\, 0'',741686,$$
$$\frac{d\varpi_{\prime}^{\text{iv}}}{dt} = 6'',777219, \qquad \frac{d\varpi_{\prime}^{\text{v}}}{dt} = \quad 19'',119941.$$

En supposant que t exprime un nombre d'années ju-

liennes, on a généralement

$$\frac{de_{,}}{dt} = \frac{de}{dt} + t\,\frac{d^2e}{dt^2},$$

les différences $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$, dans le second membre étant relatives à l'époque de 1800, il en serait de même relativement à $\frac{d\omega'}{dt}$, en faisant donc $t = 2000$, on aura

$$\frac{d^2e^{\text{IV}}}{dt^2} = -0'',000015527, \quad \frac{d^2e^{\text{V}}}{dt^2} = -0'',000025900,$$

$$\frac{d^2\omega^{\text{IV}}}{dt^2} = +0'',000470485, \quad \frac{d^2\omega^{\text{V}}}{dt^2} = \quad 0'',000324485.$$

L'expression de e^{IV} pour un temps quelconque t en négligeant les cubes et les puissances supérieures du temps est :

$$e^{\text{IV}} + t\,\frac{de^{\text{IV}}}{dt} + \frac{t^2}{2}\,\frac{de^{\text{IV}2}}{dt^2},$$

et l'on a pour ω^{IV}, e^{V} et ω^{V} des expressions semblables. On aura donc ainsi pour un temps quelconque t à partir de 1800,

$$e_{,}^{\text{IV}} = e^{\text{IV}} + t.0'',314088 - t^2.0'',000007763,$$
$$\omega_{,}^{\text{IV}} = \omega^{\text{IV}} + t.6'',683122 + t^2.0'',000235242,$$
$$e_{,}^{\text{V}} = e^{\text{V}} - t.0'',736506 - t^2.0'',000012950,$$
$$\omega_{,}^{\text{V}} = \omega^{\text{V}} + t.19'',055044 + t^2.0'',0001622425.$$

Les valeurs de e^{IV}, ω^{IV}, e^{V}, ω^{V} dans le second membre étant celles de 1800.

En nommant γ l'inclinaison, et Π la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle de

Jupiter, vu la petitesse des angles φ et φ' on a à très peu près, n° 86, livre II,

$$\gamma \sin \Pi = \varphi' \sin \alpha' - \varphi \sin \alpha,$$
$$\gamma \cos \Pi = \varphi' \cos \alpha' - \varphi \cos \alpha;$$

d'où l'on a conclu pour 1800,

$$\gamma = 1^\circ 15' 12'',6,$$
$$\Pi = 126^\circ\ 6' 14''.$$

Les équations précédentes donnent en les différentiant

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}\cos(\alpha'-\Pi) - \frac{d\varphi}{dt}\cos(\alpha-\Pi) - \varphi'\frac{d\alpha'}{dt}\sin(\alpha'-\Pi) + \varphi\frac{d\alpha}{dt}\sin(\alpha-\Pi),$$
$$\gamma\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}\sin(\alpha'-\Pi) - \frac{d\varphi}{dt}\sin(\alpha-\Pi) + \varphi'\frac{d\alpha'}{dt}\cos(\alpha'-\Pi) - \varphi\frac{d\alpha}{dt}\cos(\alpha-\Pi).$$

si l'on substitue dans les seconds membres pour $\frac{d\varphi'}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$ leurs valeurs données n° 91, on aura pour 1800

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\ 0'',0001940,$$
$$\frac{d\Pi}{dt} = -\ 22'',924637.$$

En calculant par les formules du n° 54, la partie des valeurs de $\frac{d\gamma}{dt}$, et de $\frac{d\Pi}{dt}$, qui dépend du carré de la force perturbatrice, on trouve

$$\delta\gamma = t.0'',000178234,$$
$$\delta\Pi = -\ t.0'',00739080.$$

Le coefficient du temps t dans ces expressions doit

être ajouté aux valeurs précédentes de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$, et l'on trouve ainsi pour les valeurs complètes de ces deux quantités en 1800.

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\ 0,''00001\,5766,$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\ 22'',932028.$$

On a calculé de la même manière les parties des valeurs de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$, dépendantes du carré de la force perturbatrice et relatives à l'époque de 2000, on a trouvé

$$\delta\gamma = t.0'',000245056,$$
$$\delta\Pi = -\ t.0'',00098376,$$

en ajoutant les coefficiens du temps dans ces expressions aux valeurs de $\frac{d\gamma}{dt}$ et de $\frac{d\Pi}{dt}$ calculées pour la même époque, on trouve pour les valeurs de ces quantités relatives à 2000,

$$\frac{d\gamma_{,}}{dt} = -\ 0'',0016329,$$

$$\frac{d\Pi'}{dt} = -\ 23'',232521;$$

de là, on a conclu pour un temps quelconque t,

$$\Pi' = \Pi - t.22'',932028 - t^2.0'',00150247,$$
$$\gamma_{,} = \gamma - t.0'',000015766 - t^2.0'',0000081645.$$

Les valeurs de γ et Π dans le second membre se rapportent à 1800.

Au moyen de ces expressions, on a calculé les valeurs de e^{iv}, e^{v}, ω^{iv}, ω^{v}, γ et Π, pour les époques de 2300 et de 2800, et à l'aide de ces valeurs on a trouvé ensuite pour 2300,

$$a^{\text{v}}P_{,} = 0{,}000134928,$$
$$a^{\text{v}}P'_{,} = 0{,}001003397,$$

et pour 2800,

$$a^{\text{v}}P_{,,} = 0{,}000312547,$$
$$a^{\text{v}}P'_{,,} = 0{,}000941940.$$

De là, on a conclu par le n° 66,

$$a^{\text{v}}\frac{dP}{dt} = -\ 0{,}000000383357,$$
$$a^{\text{v}}\frac{dP'}{dt} = \quad 0{,}0000000126433,$$
$$a^{\text{v}}\frac{d^2P}{dt^2} = \quad 0{,}00000000000037492,$$
$$a^{\text{v}}\frac{d^2P'}{dt^2} = \quad 0{,}0000000000147028.$$

Si l'on suppose, n° 66,

$$P_{,} = P - \frac{2dP'}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})\,dt} - \frac{3d^2P}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2dt^2},$$
$$P'_{,} = P' + \frac{2dP}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})\,dt} - \frac{3d^2P'}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2dt^2};$$

on aura donc, d'après les valeurs précédentes,

$$a^{\text{v}}P_{1} = -\ 0{,}000046307,$$

$$a^{\text{v}}P'_{1} = \quad 0{,}001144278,$$

$$a^{\text{v}}\,\frac{dP_{1}}{dt} = -\ 0{,}000000424589,$$

$$a^{\text{v}}\,\frac{dP'_{1}}{dt} = \quad 0{,}0000000231575,$$

$$a^{\text{v}}\,\frac{d^{2}P_{1}}{dt^{2}} = \quad 0{,}00000000000037492,$$

$$a^{\text{v}}\,\frac{d^{2}P'_{1}}{dt^{2}} = \quad 0{,}000000000147028.$$

La partie de δv^{iv} qui est divisée par $(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^{2}$, a pour expression

$$\frac{6m^{\text{iv}}n^{\text{iv}2}a}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^{2}}.\left\{\begin{array}{l}\left(a^{\text{v}}P'_{1}+t\,a^{\text{v}}\frac{dP'_{1}}{dt}+\frac{t^{2}}{2}\,a^{\text{v}}\frac{d^{2}P'_{1}}{dt^{2}}\right)\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\\ -\left(a^{\text{v}}P_{1}+t\,a^{\text{v}}\frac{dP_{1}}{dt}+\frac{t^{2}}{2}\,a^{\text{v}}\frac{d^{2}P_{1}}{dt^{2}}\right)\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).\end{array}\right\}$$

En réduisant cette fonction en nombres, on aura

$$\begin{array}{l}\delta v^{\text{iv}} = (1213'',015555 - t.0'',024549 - t^{2}.0'',000077930)\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})\\ \qquad + (49'',088710 - t.0'',450095 + t^{2}.0'',000019872)\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).\end{array}$$

Pour calculer la partie de la valeur de $\delta^{\text{v}}v$ qui a pour diviseur $5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}$, il faut déterminer les différences $a^{\text{iv}}\,\frac{dP}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{iv}}\,\frac{dP'}{da^{\text{iv}}}$, qui entrent dans la formule (I), n° 38; on trouve

$$a^{\text{v}2}\frac{dM^{(0)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.12{,}14696, \quad a^{\text{v}2}\frac{dM^{(3)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.26{,}46390,$$

$$a^{\text{v}2}\frac{dM^{(1)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.50{,}22714, \quad a^{\text{v}2}\frac{dN^{(0)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.4{,}13173,$$

$$a^{\text{v}2}\frac{dM^{(2)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.65{,}75870, \quad a^{\text{v}2}\frac{dN^{(1)}}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.6{,}75963;$$

d'où l'on a conclu

$$a^{\text{v}2}\,\frac{dP}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.0{,}00233313,$$

$$a^{\text{v}2}\,\frac{dP'}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.0{,}00630361.$$

La partie dont il s'agit a pour expression

$$-\frac{2m^{\text{v}}n^{\text{iv}}a^2}{5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}2}\,\frac{dP'}{da^{\text{iv}}}\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\,a^{\text{v}2}\,\frac{dP}{da^{\text{iv}}}\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\}.$$

En la réduisant en nombres, on trouve cette fonction, en 1800, égale à

$$-\,16'',353864\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$+\;6'',052991\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).$$

On a trouvé de la même manière pour 2000,

$$a^{\text{v}2}\,\frac{dP}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.0{,}00235825,$$

$$a^{\text{v}2}\,\frac{dP'}{da^{\text{iv}}} = m^{\text{v}}.0{,}00612383;$$

la fonction précédente à la même époque sera donc égale à

$$-\,15'',887450\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$+\;6'',117461\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}});$$

d'où l'on a conclu, pour un temps quelconque t à partir de 1800,

$$\delta v^{\text{iv}}_{2} = -(16'',353864 - t.0'',0023321)\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$+(6'',052991 + t.0'',0003224)\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).$$

La grande inégalité de Jupiter contient encore parmi les termes qui ont $5n^{v} - 2n^{iv}$ pour diviseur, le suivant :

$$-\tfrac{1}{2} e^{iv} h \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv} + \delta).$$

Ce terme est celui qui résulte de la variation dépendante de l'angle $5n^{v}t - 2n^{iv}t$ de la longitude de l'époque dans l'expression de la longitude vraie ; on peut aisément le réduire en nombres. Eu effet, l'inégalité de δv^{iv} dépendante de l'angle $5n^{v}t - 3n^{iv}t$ est à très peu près, n° 38, en n'ayant égard qu'aux termes qui ont $5n^{v} - 2n^{iv}$ pour diviseur, égale à

$$2h \sin(5n^{v}t - 3n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} + \delta);$$

on aura donc, n° 101,

$$h = 80'',57468, \qquad \delta = -58^{\circ}11'34''.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de e^{iv} et de ϖ^{iv}, rapportées n° 88, on a trouvé pour la valeur de l'inégalité précédente, en 1800,

$$+0'',685240 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) - 1'',815295 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

En calculant la même inégalité pour 2000, on a trouvé

$$+0'',586053 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) - 1'',828084 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

de là, on a conclu pour un temps t quelconque, à partir de 1800,

$$\delta v^{iv} = (0'',685240 - t.0'',0004959) \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$- (1'',815295 + t.0'',0000639) \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Considérons maintenant la partie de la grande

inégalité qui dépend des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons; pour la déterminer il a fallu calculer, d'après les formules du n° 42, les valeurs des quantités $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, etc., pour les deux époques de 1800 et de 2000. On a trouvé :

Pour 1800,	Pour 2000,
$a^{v}M^{(0)} = 0{,}0000009330\,38$,	$a^{v}M^{(0)} = 0{,}000000947\,41$,
$a^{v}M^{(1)} = -\,0{,}0000066727\,40$,	$a^{v}M^{(1)} = -\,0{,}0000066737\,10$,
$a^{v}M^{(2)} = 0{,}0000175099\,6$,	$a^{v}M^{(2)} = 0{,}0000172516\,1$,
$a^{v}M^{(3)} = -\,0{,}0000193979\,9$,	$a^{v}M^{(3)} = -\,0{,}0000192145\,6$,
$a^{v}M^{(4)} = 0{,}0000078501\,0$,	$a^{v}M^{(4)} = 0{,}0000075036\,8$,
$a^{v}M^{(5)} = 0{,}0000013600\,8$,	$a^{v}M^{(5)} = 0{,}0000013092\,4$,
$a^{v}N^{(0)} = -\,0{,}0000000725\,976$,	$a^{v}N^{(0)} = -\,0{,}0000000727\,47$,
$a^{v}N^{(1)} = -\,0{,}0000001982\,328$,	$a^{v}N^{(1)} = -\,0{,}0000000556\,55$,
$a^{v}N^{(2)} = -\,0{,}0000000703\,15$,	$a^{v}N^{(2)} = -\,0{,}0000000779\,2$,
$a^{v}N^{(3)} = 0{,}0000003585\,20$,	$a^{v}N^{(3)} = 0{,}0000003585\,20$,
$a^{v}N^{(4)} = 0{,}0000000000\,51449$,	$a^{v}N^{(4)} = 0{,}0000000000\,50877$,
$a^{v}N^{(5)} = 0{,}0000000001\,55491$,	$a^{v}N^{(5)} = 0{,}0000000001\,56500$.

En vertu de ces valeurs, on a trouvé n° 42, pour 1800,

$$a^{v}Q = 0{,}0000074937,$$

$$a^{v}Q' = 0{,}0000091388,$$

et pour les mêmes quantités en 2000,

$$a^{v}Q = 0{,}0000081539,$$

$$a^{v}Q' = 0{,}0000087656;$$

de là on a conclu

$$a^{v}\,\frac{dQ}{dt} = 0{,}0000000033007,$$

$$a^{v}\,\frac{dQ'}{dt} = -\,0{,}0000000018660\,5,$$

et par suite,

$$\frac{2a^{v}dQ}{(5n^{v}-2n^{iv})\,dt} = 0{,}00000092565,$$

$$\frac{2a^{v}dQ'}{(5n^{v}-2n^{iv})\,dt} = -\,0{,}00000052331 6.$$

L'expression de la partie de la grande inégalité de Jupiter, qui dépend des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, en tenant compte des premières puissances du temps dans les coefficiens, est, d'après les n°s 41 et 42,

$$+\frac{6m^{v}n^{iv2}a}{(5n^{v}-2n^{iv})^{2}}\cdot\left\{\begin{array}{l}\left[a^{v}Q'+\frac{2a^{v}dQ}{(5n^{v}-2n^{iv})dt}+t\,a^{v}\frac{dQ'}{dt}\right]\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv})\\ -\left[a^{v}Q-\frac{2a^{v}dQ'}{(5n^{v}-2n^{iv})dt}+t\,a^{v}\frac{dQ}{dt}\right]\quad n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}).\end{array}\right\}$$

en réduisant cette fonction en nombres, en vertu de l'inégalité que nous considérons, on aura

$$\begin{aligned}\delta v^{iv} = &-(10'',66900 - t.0'',00197815)\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv})\\ &+(8'',49861 + t.0'',00349898)\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}).\end{aligned}$$

Enfin, j'ai déterminé la partie sensible de la grande inégalité de Jupiter, dépendante du carré de la force perturbatrice, par les formules des n°s 57 et suivans. En ne considérant que les termes de cet ordre, on a

$$\delta v^{iv} = -\,3a^{iv}n^{iv}\int dt\int d'.\delta R' + \frac{3a^{iv2}n^{iv}}{2}\int dt\left(\int d'R\right)^{2};$$

le dernier terme de cette formule donne l'inégalité suivante

$$0'',024886\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv})+0'',00266\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}).$$

Cette inégalité est la seule que fournisse la seconde partie de la formule précédente. Considérons donc

uniquement son premier terme; on a, n° 47,

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s + \frac{dR}{dr'}\delta r' + \frac{dR}{dv'}\delta v' + \frac{dR}{ds'}\delta s';$$

et pour obtenir la valeur complète de δv^{IV}, il faut combiner entre eux les différens termes de chacun des facteurs qui entrent dans la valeur de δR, de manière que la somme ou la différence des argumens des termes que l'on a considérés, soit égale à $5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t$, et que la somme des exposans des excentricités et des inclinaisons dans ces termes ne dépasse pas trois. On a trouvé, de cette manière, les résultats suivans.

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t$ *et zéro :*

$$-1'',91826 \sin(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}) + 0'',41900 \cos(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}).$$

On a calculé ensuite, relativement à Saturne, les inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice, qui résultent des diverses combinaisons indiquées n° 57, la précédente exceptée, et l'on en a déduit la partie correspondante de l'inégalité de Jupiter, au moyen de l'équation de condition

$$m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}}\,\delta\zeta^{\text{IV}} + m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}\,\delta\zeta^{\text{V}} + (m^{\text{IV}} - m^{\text{V}})m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}\,\zeta^{\text{V}} = 0.$$

D'après les valeurs que nous avons adoptées pour les masses de Jupiter et de Saturne, on aura

$$\frac{m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}{m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}}} = 0{,}4063780, \quad m^{\text{IV}} - m^{\text{V}} = 0{,}000664097;$$

l'équation précédente devient ainsi,

$$\delta\zeta^{\text{iv}} + 0{,}406378\,\delta\zeta^{\text{v}} + 0{,}000269874\,\zeta^{\text{v}} = 0, \quad (a)$$

ζ^{v} désignant ici la partie de la variation du moyen mouvement de Saturne, relative à l'argument de la grande inégalité, et dépendante de la première puissance de la force perturbatrice; cette quantité est à très peu près égale à la partie correspondante de la longitude vraie. On verra dans la théorie de Saturne, qu'on a ainsi,

$$\begin{aligned}\zeta^{\text{v}} = &- 2901'',72929 \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\ &- 150'',52476 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}).\end{aligned}$$

En déduisant de la valeur complète de $\delta\zeta^{\text{v}}$, la partie relative à la combinaison des argumens $5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t$ et zéro, on trouve même théorie,

$$\begin{aligned}\delta\zeta^{\text{v}} = &- 4'',44007 \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\ &- 34'',15412 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}).\end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (a), on en conclura pour l'inégalité qui en résulte dans $\delta\zeta^{\text{iv}}$:

$$2'',587449 \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) + 13'',920104 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}).$$

En réunissant cette partie de $\delta\zeta^{\text{iv}}$ à celles que nous avons déterminées précédemment, on aura pour sa valeur complète,

$$\begin{aligned}\delta\zeta^{\text{iv}} = &\ 0'',69408 \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\ &+ 14'',34176 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}});\end{aligned}$$

j'ai trouvé par le calcul direct

$$\begin{aligned}\delta\zeta^{\text{iv}} = &\ 3'',73539 \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\ &+ 14'',72002 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}),\end{aligned}$$

valeur qui diffère peu de la précédente.

Il résulte du carré de la force perturbatrice dans l'expression de la longitude de l'époque des inégalités du même ordre que les précédentes et dépen-

dantes de même de l'argument de la grande inégalité. En réduisant en nombres les formules du n° 64, on a trouvé

$$\delta\varepsilon^{\mathrm{iv}} = 1'',31027 \sin(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}) + 0'',013628 \cos(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}).$$

Cette inégalité doit être ajoutée à la précédente dans l'expression de la longitude vraie de Jupiter. On aura donc ainsi pour la valeur totale de l'inégalité, que le carré de la force perturbatrice introduit dans le mouvement en longitude de la partie de la grande inégalité qui dépend du carré de la force perturbatrice,

$$\begin{aligned} \delta v^{\mathrm{iv}} = {} & 2'',00435 \sin(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}) \\ & + 14'',47804 \cos(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}). \end{aligned}$$

Si l'on rassemble maintenant les différentes parties de la grande inégalité que nous venons de déterminer, on aura pour sa valeur entière

$$(1+\mu^{\mathrm{v}}) \left\{ \begin{array}{l} (1184'',77525 - t\,0'',020749 - t^2\,0'',0000779\,30) \sin(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}) \\ + \ (76'',26543 - t\,0'',446012 + t^2\,0'',000019872) \cos(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}}). \end{array} \right\}$$

En réunissant les deux termes de cette inégalité en un seul, par la méthode du n° 66, on aura la suivante,

$$\begin{array}{c} (1+\mu^{\mathrm{v}})\,(1187'',24735 - t\,0'',04844957 + t^2\,0'',0000022\,6062) \\ \times \sin(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} + 3^{\circ}40'59'' - t\,76'',27700 - t^2\,0'',0012620). \end{array}$$

Cette grande inégalité doit être appliquée comme on l'a vu n° 29, au moyen mouvement de Jupiter.

Le carré de la force perturbatrice introduit encore dans le mouvement en longitude une inégalité dépendante du double de l'argument de la grande inégalité, qui a pour expression

$$-\frac{9m^{\mathrm{v}2}n^{\mathrm{iv}4}a^2}{2(5n^{\mathrm{v}}-2n^{\mathrm{iv}})^4}\left(\frac{5m^{\mathrm{iv}}\sqrt{a^{\mathrm{iv}}}+2m^{\mathrm{v}}\sqrt{a^{\mathrm{v}}}}{m^{\mathrm{v}}\sqrt{a^{\mathrm{v}}}}\right)\left\{ \begin{array}{l} a^{\mathrm{v}2}(\mathrm{P}'^2-\mathrm{P}^2)\sin 2(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\varepsilon^{\mathrm{v}}-2\varepsilon^{\mathrm{iv}}) \\ -2a^{\mathrm{v}2}\mathrm{PP}'\cos 2(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\varepsilon^{\mathrm{v}}-2\varepsilon^{\mathrm{iv}}). \end{array} \right\}$$

On pourrait réduire cette fonction en nombres au moyen des valeurs de $a^{\text{v}}\text{P}$ et $a^{\text{v}}\text{P}'$, qui ont été déterminées précédemment; mais on peut lui donner une forme qui en rendra le calcul plus facile. En effet, soit

$$-\frac{9m^{\text{v}2}n^{\text{iv}4}a^{\text{v}2}\text{H}^2}{2(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2}\left(\frac{5m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}+2m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}\right)\sin 2(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}+\text{A});$$

l'expression de l'inégalité précédente, réduite en un seul terme, en comparant ces deux valeurs, on aura

$$\text{H}^2\cos 2\text{A} = \text{P}'^2 - \text{P}^2, \quad \text{H}^2\sin 2\text{A} = -2\text{PP}';$$

d'où l'on tire,

$$\text{H} = \sqrt{\text{P}^2+\text{P}'^2}, \quad \text{et} \quad \text{tang}\,\text{A} = -\frac{\text{P}}{\text{P}'}.$$

Or, la partie de la grande inégalité qui a pour diviseur $(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2$, et qui ne dépend que de la première puissance de la force perturbatrice, peut prendre cette forme

$$\frac{6m^{\text{v}}n^{\text{iv}2}a^{\text{iv}}\text{H}}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2}\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}+\text{A}).$$

Si donc on nomme K le coefficient de la grande inégalité et $5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}+\text{A}$ son argument, comme les termes qui ont pour diviseur $(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2$, forment la partie principale de la grande inégalité, on aura à très peu près pour l'expression de l'inégalité dépendante du double de l'argument de la grande inégalité,

$$-\frac{\text{K}^2}{8}\,\frac{(5m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}+2m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}})}{m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}\sin\text{(double de l'argument de la grande inégalité)}.$$

cette fonction réduite en nombres donne l'inégalité suivante,

$$-12'',21854 \sin 2(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\epsilon^{v} - 2\epsilon^{iv} + 3°40'59''),$$

l'expression de δv^{iv} contient encore l'inégalité,

$$+\tfrac{5}{2} e^{iv} h \sin(5n^{v}t - 4n^{iv}t + 5\epsilon^{v} - 4\epsilon^{iv} + \varpi^{iv} + \delta).$$

Cette inégalité est celle qui résulte de la variation de l'excentricité et du périhélie dépendante de l'angle $5n't - 2nt$ dans le terme $\frac{5}{4} e^{2} \sin(2nt + 2\epsilon - 2\varpi)$ de l'équation du centre, n° 36; en la réduisant en nombres, d'après les valeurs précédentes, on aura celle-ci,

$$+9'',701610 \sin(5n^{v}t - 4n^{iv}t + 5\epsilon^{v} - 4\epsilon^{iv} - 47°3'57'').$$

Nous nous sommes contentés, dans le n° 36, de considérer les variations des deux premiers termes de l'équation du centre, et nous avons supposé que les autres termes pouvaient être négligés. Pour porter plus loin l'approximation, considérons dans l'expression de la longitude vraie de Jupiter, en fonction de la longitude moyenne, le terme

$$+\tfrac{13}{12} e^{iv3} \sin(3n^{iv}t + 3\epsilon^{iv} - 3\varpi^{iv}).$$

En augmentant l'excentricité e^{iv} et la longitude ϖ^{iv} du périhélie de leurs variations δe^{iv} et $\delta\varpi^{iv}$, il en résultera la fonction suivante,

$$\frac{13}{4} e^{iv2} \left\{ \begin{array}{l} \delta e^{iv} \sin 3(n^{iv}t + \epsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \\ - e^{iv}\delta\varpi^{iv} \sin 3(n^{iv}t + \epsilon^{iv} - \varpi^{iv}). \end{array} \right\} \quad (b)$$

Si l'on ne considère dans δe^{iv} et $\delta\varpi^{iv}$, que la partie

de leurs valeurs qui dépend de l'angle $5n^{v}t - 2n^{iv}t$, on aura, n° 36,

$$\delta e^{iv} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{K}\cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv} + \mathrm{A}),$$

$$e^{iv}\delta\varpi^{iv} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{K}\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv} + \mathrm{A}),$$

en désignant, comme on l'a fait précédemment, par $\mathrm{K}\sin(5n^{v}t - 3n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} + \mathrm{A})$ l'inégalité du mouvement de Jupiter, qui dépend de l'angle $5n^{v}t - 3n^{iv}t$. La fonction (b) devient donc ainsi,

$$\tfrac{13}{8}e^{iv2}\mathrm{K}\sin(5n^{v}t - 5n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 5\varepsilon^{iv} + 2\varpi^{iv} + \mathrm{A});$$

ou bien, en substituant pour K et A leurs valeurs,

$$-\frac{13}{8}e^{iv2}\,161'',14937\sin(5n^{v}t - 5n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 5\varepsilon^{iv} + 2\varpi^{iv} - 58°\,11'34'').$$

Cette fonction réduite en nombres donne

$$+\,0'',60744\sin(5n^{iv}t - 5n^{v}t + 5\varepsilon^{iv} - 5\varepsilon^{v} + 35°56'22'');$$

en réunissant cette inégalité à la suivante,

$$+(1+\mu^{v})\,1'',157972\sin(5n^{iv}t - 5n^{v}t + 5\varepsilon^{iv} - 5\varepsilon^{v}),$$

que nous avons trouvée précédemment, et qui est indépendante des excentricités, on a celle-ci :

$$+(1+\mu^{v})\,1'',687866\sin(5n^{iv}t - 5n^{v}t + 5\varepsilon^{iv} - 5\varepsilon^{v} + 12°\,11'\,39'').$$

Le mouvement en longitude renferme encore, n° 53, l'inégalité suivante,

$$\frac{1}{4}\,\frac{(5m^{iv}\sqrt{a^{iv}} + 4m^{v}\sqrt{a^{v}})}{m^{v}\sqrt{a^{v}}}\,\overline{\mathrm{H}}\mathrm{K}\sin(10n^{v}t - 5n^{iv}t + 10\varepsilon^{v} - 5\varepsilon^{iv} + \mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

En réduisant en nombres cette fonction au moyen

des valeurs précédentes de $\overline{\text{H}}$, K, A et B, on trouve

$$3'',780781 \sin(10n^{\text{v}}t - 5n^{\text{iv}}t + 10\varepsilon^{\text{v}} - 5\varepsilon^{\text{iv}} - 54^{\circ}30'35'').$$

Le carré de la force perturbatrice peut encore introduire dans l'expression de la longitude de Jupiter et de Saturne, quelques autres inégalités qui peuvent devenir sensibles en vertu de la commensurabilité approchée de leurs moyens mouvemens ; ces inégalités sont en général très petites, mais comme les principales sont affectées des mêmes argumens que d'autres inégalités déjà calculées, elles pourront s'ajouter à celles-ci sans compliquer les formules. On les déterminera très simplement de la manière suivante.

Nous avons vu, nº 85, livre II, que la première puissance des excentricités et des inclinaisons produit dans l'expression de δv^{iv}, les inégalités suivantes,

$$+ e^{\text{iv}}\text{G} \sin(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}),$$
$$+ e^{\text{v}}\text{H} \sin(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}),$$

où l'on fait, pour abréger, $i(n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}}) = f$.

Supposons maintenant que pour avoir égard aux inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice, on augmente dans ces deux fonctions les excentricités et les périhélies de Jupiter et de Saturne, de leurs variations, il en résultera dans δv^{iv} les inégalités suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} \delta e^{\text{iv}}\text{G}\sin(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) - e^{\text{iv}}\delta\varpi^{\text{iv}}\text{G}\cos(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}) \\ + \delta e^{\text{v}}\text{H}\sin(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}) - e^{\text{v}}\delta\varpi^{\text{v}}\text{H}\cos(f + n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}). \end{array}\right\} \quad (\text{A})$$

Si dans les variations des excentricités et des périhé-

lies de Jupiter et de Saturne, on n'a égard qu'aux termes dépendans de l'argument de la grande inégalité, qui en forment la principale partie, on aura, n° 36,

$$\delta e^{\text{iv}} = -h\cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + \beta),$$

$$e^{\text{iv}}\delta\varpi^{\text{iv}} = -h\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + \beta).$$

Les deux premières inégalités (A) donnent ainsi la suivante,

$$h\mathrm{G}\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} - f - n^{\text{iv}}t - \epsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{iv}} + \beta).$$

Nous avons vu, n° 38, que l'inégalité dépendante de l'angle $5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t$ avait pour expression... $2h\sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{iv}} + \beta)$; en la représentant donc par $\mathrm{K}\sin(5n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 3\epsilon^{\text{iv}} + \mathrm{A})$, l'inégalité précédente deviendra

$$\frac{\mathrm{KG}}{2}\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} - f - n^{\text{iv}}t - \epsilon^{\text{iv}} + \mathrm{A}).$$

On démontrerait de même que si l'on désigne par $\mathrm{K}'\sin(4n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 4\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + \mathrm{A}')$, l'inégalité de la longitude de Saturne qui dépend de l'angle $4n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t$, le troisième et le quatrième terme de la fonction (A) produiront dans l'expression de δv^{iv}, l'inégalité suivante,

$$\frac{\mathrm{K'H}}{2}\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} - f - n^{\text{iv}}t - \epsilon^{\text{iv}} + \mathrm{A}'). \quad \text{(B)}$$

Cela posé, considérons les principales inégalités du mouvement de Jupiter en longitude. Les plus considérables parmi celles qui dépendent des simples excentricités sont les quatre suivantes,

$$\left.\begin{array}{l}-132'',59600\sin(2n^{v}t-n^{iv}t+2\epsilon^{v}-\epsilon^{iv}-\omega^{iv})\\+54'',10190\sin(2n^{v}t-n^{iv}t+2\epsilon^{v}-\epsilon^{iv}-\omega^{v})\\-42'',60448\sin(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}-\omega^{iv})\\+81'',14470\sin(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}-\omega^{v}).\end{array}\right\}(o)$$

Si l'on donne à la première de ces inégalités, cette forme

$$-\frac{132'',59600}{e^{iv}}e^{iv}\sin(2n^{v}t-n^{iv}t+2\epsilon^{v}-\epsilon^{iv}-\omega^{iv}),$$

et qu'on la compare ensuite à celle-ci

$$+e^{iv}G\sin(f+n^{iv}t+\epsilon^{v}-\omega^{iv}),$$

on aura

$$G=-\frac{132'',59600}{e^{iv}},\quad f=2n^{v}t-2n^{iv}t+2\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}.$$

L'inégalité de δv^{iv} dépendante de l'angle $5n^{v}t-3n^{iv}t$, est égale à

$$-161'',14937\sin(5n^{v}t-3n^{iv}t+5\epsilon^{v}-3\epsilon^{iv}-58°11'34''),$$

ce qui donne

$$K=-161'',14937,\quad A=-58°11'34'';$$

on aura donc dans δv^{iv} l'inégalité,

$$\frac{132'',59600}{2e^{iv}}\cdot161'',14937\sin(3n^{v}t-n^{iv}t+3\epsilon^{v}-\epsilon^{iv}-58°11'34'').$$

De même, si l'on met la troisième des inégalités (o), sous la forme,

$$-\frac{42'',60448}{e^{iv}}e^{iv}\sin(3n^{v}t-2n^{iv}t+3\epsilon^{v}-2\epsilon^{iv}-\omega^{iv});$$

en la combinant avec l'inégalité

$$-161'',14937 \sin(5n^{v}t - 3n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} - 58^{\circ}11'34''),$$

on aura la suivante

$$\frac{42'',60448}{2e^{iv}} \cdot 161'',14937 \sin(2n^{v}t + 2\varepsilon^{v} - 58^{\circ}11'34'').$$

On verra, dans la théorie de Saturne, que le mouvement de cette planète est assujetti à l'inégalité,

$$-652'',58660 \sin(2n^{iv}t - 4n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - 4\varepsilon^{v} + 59^{\circ}34'4''). \quad (m)$$

Nous avons représenté par $-K' \sin(2n^{iv}t - 4n^{v}t + 2\varepsilon^{iv} - 4\varepsilon^{v} - A')$ cette inégalité, ce qui donne

$$K' = 652'',58660, \quad A' = -59^{\circ}34'4''.$$

La seconde des inégalités (o) dépendant de l'excentricité de Saturne peut prendre cette forme,

$$\frac{54'',10190}{e^{v}} e^{v} \sin(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{v}),$$

ce qui donne

$$H = \frac{54'',10190}{e^{v}}, \quad f = 2n^{v}t - 2n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv};$$

l'inégalité (B) devient ainsi,

$$-\frac{54'',10190}{2e^{v}} \cdot 652'',58660 \sin(n^{iv}t - 3n^{v}t + \varepsilon^{iv} - 3\varepsilon^{v} + 59^{\circ}34'4'').$$

Enfin, la quatrième des inégalités (o) peut s'écrire ainsi,

$$\frac{81'',14470}{e^{v}} e^{v} \sin(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v});$$

et combinée avec l'inégalité (m), elle donnera celle-ci,

$$+\frac{81'',14470}{2e^{\text{v}}}.652'',58660 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 59^{\circ}34'4'').$$

Si dans les fonctions précédentes on substitue pour e^{iv} et e^{v} leurs valeurs relatives à 1800, on verra qu'il en résulte dans δv^{iv} les quatre inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}
& 1'',07547 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - 58^{\circ}11'34''), \\
& + 0'',37638 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 58^{\circ}11'34''), \\
& + 1'',39937 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - 59^{\circ}34'4''), \\
& + 2'',28607 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 59^{\circ}34'4'').
\end{aligned}$$

Ces inégalités réunies aux suivantes, que nous avons trouvées précédemment et qui dépendent des carrés des excentricités,

$$(1+\mu^{\text{v}})\left\{\begin{aligned}
& + 11'',214818 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} + 79^{\circ}39'48'' \\
& - 5'',336306 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} + 15^{\circ}56'24''),
\end{aligned}\right\}$$

donnent celles-ci,

$$(1+\mu^{\text{v}})\left\{\begin{aligned}
& 9'',49947 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} + 69^{\circ}45'1'') \\
& - 5'',441910 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} + 43^{\circ}55'9'').
\end{aligned}\right\}$$

Considérons maintenant les inégalités du rayon vecteur de Jupiter. On a vu n° 38, que les termes dépendans du cube des excentricités ajoutaient à son expression la quantité

$$\begin{aligned}
& -\frac{4m^{\text{v}}n^{\text{iv}}a^{\text{iv}}}{5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}}\left\{\begin{aligned}
& \text{P} \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\
& + \text{P}' \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}})
\end{aligned}\right\} \\
& - eh \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{iv}} - 2\epsilon^{\text{v}} - \varpi^{\text{iv}} + \delta) \\
& + ek \cos(5n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 4\epsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{iv}} + \delta).
\end{aligned}$$

Cette fonction réduite en nombres donne les deux inégalités suivantes,

$$\delta r^{\text{IV}} = (1+\mu^{\text{V}}) \left\{ \begin{array}{l} -0{,}000291707 \cos(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} - 15^\circ\, 32'\, 43'') \\ +\, 0{,}0000967593 \cos(5n^{\text{V}}t - 4n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 4\varepsilon^{\text{IV}} - 69^\circ\, 14'\, 47''). \end{array} \right\}$$

Inégalités du mouvement de Jupiter en latitude.

101. Par les formules du n° 95 du livre II, on trouve

$$\delta s^{\text{IV}} = (1+\mu^{\text{V}}) \left\{ \begin{array}{l} \quad 0'',997810 \sin(n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}} - \Pi^{\text{IV}}) \\ +\, 0'',635078 \sin(2n^{\text{V}}t - n^{\text{IV}}t + 2\varepsilon^{\text{V}} - \varepsilon^{\text{IV}} - \Pi^{\text{IV}}) \\ +\, 1'',071126 \sin(3n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 3\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} - \Pi^{\text{IV}}) \\ -\, 0'',267242 \sin(4n^{\text{V}}t - 3n^{\text{IV}}t + 4\varepsilon^{\text{V}} - 3\varepsilon^{\text{IV}} - \Pi^{\text{IV}}) \\ -\, 0'',257436 \sin(2n^{\text{IV}}t - n^{\text{V}}t + 2\varepsilon^{\text{IV}} - \varepsilon^{\text{V}} - \Pi^{\text{IV}}), \end{array} \right\}$$

en désignant par Π^{IV} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter.

Il résulte du n° 40, que les termes dépendans des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons ajoutent à l'expression de la latitude de Jupiter la quantité

$$\frac{2a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}}{5n^{\text{V}} - 2n^{\text{IV}}} \left\{ \begin{array}{l} \quad e^{\text{V}}\gamma N^{(1)} \sin(5n^{\text{V}}t - 3n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 3\varepsilon^{\text{IV}} - \Pi - \varpi^{\text{V}}) \\ +\, e^{\text{IV}}\gamma N^{(0)} \sin(5n^{\text{V}}t - 3n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 3\varepsilon^{\text{IV}} - \Pi - \varpi^{\text{IV}}). \end{array} \right\}$$

En réduisant cette fonction en nombres, on trouve

$$\delta s^{\text{IV}} = 11'',598645 \sin(3n^{\text{IV}}t - 5n^{\text{V}}t + 3\varepsilon^{\text{IV}} - 5\varepsilon^{\text{V}} + 50^\circ\, 26'\, 4'').$$

Les équations (f) du n° 54, en substituant pour δp et δq, leurs valeurs donnent les deux suivantes,

$$\delta\varphi^{\text{IV}} \sin\alpha^{\text{IV}} + \varphi^{\text{IV}} \cos\alpha^{\text{IV}}\, \delta\alpha^{\text{IV}} = -\frac{m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}{m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}} + m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}\, \gamma\,\delta\Pi,$$

$$\delta\varphi^{\text{IV}} \cos\alpha^{\text{IV}} - \varphi^{\text{IV}} \sin\alpha^{\text{IV}}\, \delta\alpha^{\text{IV}} = -\frac{m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}{m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}} + m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}\, \delta\gamma;$$

les quantités $\delta\Pi$ et $\delta\gamma$ étant déterminées par le même numéro. L'angle α^{IV} dans ces équations est

compté de l'intersection commune des deux orbites; il faut donc en retrancher l'angle Π pour que cet angle soit compté de l'origine ordinaire des longitudes, Π étant la longitude de l'intersection de l'orbite de m^{v} sur l'orbite de m^{iv}. Les deux équations précédentes donneront ainsi,

$$\delta\varphi^{\text{iv}} = -\frac{m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}+m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}\left[\delta\gamma\cos(\Pi-\alpha^{\text{iv}})-\gamma\,\delta\Pi\sin(\Pi-\alpha^{\text{iv}})\right],$$

$$\varphi^{\text{iv}}\delta\alpha^{\text{iv}} = -\frac{m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}+m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}\left[\delta\gamma\sin(\Pi-\alpha^{\text{iv}})+\gamma\,\delta\Pi\cos(\Pi-\alpha^{\text{iv}})\right].$$

Si l'on substitue pour $\delta\gamma$ et $\gamma\delta\Pi$ leurs valeurs, n° 54, en n'ayant égard qu'aux variations séculaires, les coefficiens du temps t dans ces expressions seront les parties que le carré de la force perturbatrice ajoute aux valeurs de $\frac{d\varphi^{\text{iv}}}{dt}$, et $\frac{d\alpha^{\text{iv}}}{dt}$. En réduisant les formules en nombres, on trouve la première égale à

$$-0'',000072576,$$

et la seconde égale à

$$0'',00081129.$$

En ajoutant ces quantités, la première aux valeurs de $\frac{d\varphi^{\text{iv}}}{dt}$ et $\frac{d\varphi_{,}^{\text{iv}}}{dt}$, la seconde aux valeurs de $\frac{d\alpha^{\text{iv}}}{dt}$ et $\frac{d\alpha_{,}^{\text{iv}}}{dt}$ du n° 91, on aura

$$\frac{d\varphi^{\text{iv}}}{dt} = -0'',074206,$$

$$\frac{d\varphi_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -0'',210876,$$

$$\frac{d\alpha^{\text{iv}}}{dt} = 6'',178457,$$

$$\frac{d\alpha_{,}^{\text{iv}}}{dt} = -13'',640671.$$

CHAPITRE XVIII.

Théorie de Saturne.

102. Les inégalités de Saturne sont plus sensibles encore que celles de Jupiter, ce sont les plus considérables du système planétaire. L'équation du *maximum*,

$$\delta r^{\text{iv}} = -\frac{r^{\text{iv}2}}{r''}(1-\alpha^2)\,\delta V^{\text{iv}},$$

que nous avons trouvée, n° 100, pour Jupiter, devient relativement à Saturne,

$$\delta r^{\text{v}} = -\frac{r^{\text{v}2}}{r''}(1-\alpha^2)\,\delta V^{\text{v}}.$$

Si l'on prend pour r'' et r^{v} les moyennes distances de la Terre et de Saturne au Soleil, et qu'on suppose $\delta V^{\text{v}} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{\text{v}} = \mp 0{,}000436191.$$

On pourra négliger par conséquent les inégalités du rayon vecteur dont les coefficiens seraient au-dessous de 0,00044. Nous négligerons les inégalités du mouvement en longitude et en latitude qui seraient au-dessous d'une seconde.

Inégalités de Saturne, indépendantes des excentricités.

$$\delta v^{\mathrm{V}} = (1+\mu^{\mathrm{IV}}).\left\{\begin{array}{l} 3'',195964 \sin\ (n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -31'',887151 \sin 2(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 6'',647920 \sin 3(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 1'',990305 \sin 4(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',705754 \sin 5(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',274171 \sin 6(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',117744 \sin 7(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\mathrm{VI}}).\left\{\begin{array}{l} 10'',066873 \sin\ (n^{\mathrm{VI}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{VI}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -15'',731118 \sin 2(n^{\mathrm{VI}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{VI}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 1'',553485 \sin 3(n^{\mathrm{VI}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{VI}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',342838 \sin 4(n^{\mathrm{VI}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{VI}} - \epsilon^{\mathrm{V}}), \end{array}\right\}$$

$$\delta r^{\mathrm{V}} = (1+\mu^{\mathrm{IV}}).\left\{\begin{array}{l} 0,0039565930 \\ +\ 0,0082557000 \cos\ (n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \\ +\ 0,0014011200 \cos 2(n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{\mathrm{VI}}).\left\{\begin{array}{l} -\ 0,0000149803 \\ -\ 0,0004299541 \cos 2(n^{\mathrm{V}}t - n^{\mathrm{VI}}t + \epsilon^{\mathrm{V}} - \epsilon^{\mathrm{VI}}). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v^{\mathrm{V}} = (1+\mu^{\mathrm{IV}}).\left\{\begin{array}{l} -11'',637937 \sin\ (n^{\mathrm{IV}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ +\ 1'',276020 \sin\ (n^{\mathrm{IV}}t + \epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ -\ 2'',087470 \sin (2n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + 2\epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ +\ 2'',711142 \sin (2n^{\mathrm{IV}}t - n^{\mathrm{V}}t + 2\epsilon^{\mathrm{IV}} - \epsilon^{\mathrm{V}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ -\ 0'',288183 \sin (3n^{\mathrm{IV}}t - 2n^{\mathrm{V}}t + 3\epsilon^{\mathrm{IV}} - 2\epsilon^{\mathrm{V}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',226381 \sin (3n^{\mathrm{IV}}t - 2n^{\mathrm{V}}t + 3\epsilon^{\mathrm{IV}} - 2\epsilon^{\mathrm{V}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ -(184'',142338 - t0'',0102357)\sin(2n^{\mathrm{V}}t - n^{\mathrm{IV}}t + 2\epsilon^{\mathrm{V}} - \epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ +(423'',017880 + t0'',0140303)\sin(2n^{\mathrm{V}}t - n^{\mathrm{IV}}t + 2\epsilon^{\mathrm{V}} - \epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +34'',704748 \sin (3n^{\mathrm{V}}t - 2n^{\mathrm{IV}}t + 3\epsilon^{\mathrm{V}} - 2\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -17'',906457 \sin (3n^{\mathrm{V}}t - 2n^{\mathrm{IV}}t + 3\epsilon^{\mathrm{V}} - 2\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\ 4'',852015 \sin (4n^{\mathrm{V}}t - 3n^{\mathrm{IV}}t + 4\epsilon^{\mathrm{V}} - 3\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -\ 2'',470213 \sin (4n^{\mathrm{V}}t - 3n^{\mathrm{IV}}t + 4\epsilon^{\mathrm{V}} - 3\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\ 1'',412411 \sin (5n^{\mathrm{V}}t - 4n^{\mathrm{IV}}t + 5\epsilon^{\mathrm{V}} - 4\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',713519 \sin (5n^{\mathrm{V}}t - 4n^{\mathrm{IV}}t + 5\epsilon^{\mathrm{V}} - 4\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\ 0'',514814 \sin (6n^{\mathrm{V}}t - 5n^{\mathrm{IV}}t + 6\epsilon^{\mathrm{V}} - 5\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',260176 \sin (6n^{\mathrm{V}}t - 5n^{\mathrm{IV}}t + 6\epsilon^{\mathrm{V}} - 5\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\ 0'',218607 \sin (7n^{\mathrm{V}}t - 6n^{\mathrm{IV}}t + 7\epsilon^{\mathrm{V}} - 6\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{V}}) \\ -\ 0'',108875 \sin (7n^{\mathrm{V}}t - 6n^{\mathrm{IV}}t + 7\epsilon^{\mathrm{V}} - 6\epsilon^{\mathrm{IV}} - \varpi^{\mathrm{IV}}) \end{array}\right)$$

$$+(1+\mu^{\text{vi}}).\left\{\begin{array}{l}
1'',241878 \sin(n^{\text{vi}}t+\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-1''.099105 \sin(n^{\text{iv}}t-\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-10'',907625 \sin(2n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+3'',005313 \sin(2n^{\text{vi}}t-n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{vi}}-\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-18'',411093 \sin(3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+27'',327900 \sin(3n^{\text{vi}}t-2n^{\text{v}}t+3\varepsilon^{\text{vi}}-2\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
+0'',608043 \sin(4n^{\text{vi}}t-3n^{\text{v}}t+4\varepsilon^{\text{vi}}-3\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}) \\
-0'',823774 \sin(4n^{\text{vi}}t-3n^{\text{v}}t+4\varepsilon^{\text{vi}}-3\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-0'',203958 \sin(5n^{\text{vi}}t-4n^{\text{v}}t+5\varepsilon^{\text{vi}}-4\varepsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{vi}}) \\
-0'',732493 \sin(2n^{\text{v}}t-n^{\text{vi}}t+2\varepsilon^{\text{v}}-\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+1'',654077 \sin(3n^{\text{v}}t-2n^{\text{vi}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{v}}) \\
+0'',157021 \sin(4n^{\text{v}}t-3n^{\text{vi}}t+4\varepsilon^{\text{v}}-3\varepsilon^{\text{vi}}-\varpi^{\text{v}}).
\end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons des orbites.

En vertu du rapport qui existe entre les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, $2(n^{\text{v}}-n^{\text{iv}})+2n^{\text{v}}$ diffère peu de $-n$; il faut donc, n° 34, considérer l'inégalité dépendante de l'angle $2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t$. Par la formule (A) du n° cité, on a trouvé pour 1800 cette inégalité égale à

$$-652'',58660 \sin(2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}+59°\,34'\,4'');$$

et pour 2000 la même inégalité devient,

$$-644'',95344 \sin(2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}+56°\,11'\,83'');$$

d'où l'on a conclu pour un temps quelconque,

$$\delta v^{\text{v}} = -(1+\mu^{\text{iv}})(652'',58660-t\,0'',038168)\sin(2n^{\text{iv}}t-4n^{\text{v}}t+2\varepsilon^{\text{iv}}-4\varepsilon^{\text{v}}$$
$$+59°\,34'\,4''-t\,60'',76).$$

Les autres inégalités du mouvement de Saturne dépendantes du carré des excentricités et des inclinaisons, ont été calculées par les formules du n° 34 : on a trouvé ainsi

$$\delta v^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} -(55'',51470 - t\,0'',00036643) \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 84^\circ\,7'\,57'' - t\,34'',55) \\ + 28'',88860 \sin(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}} + 83^\circ\,57'\,46'') \\ - 2'',97441 \sin(5n^{\text{vi}}t - 3n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 3\varepsilon^{\text{iv}} - 59^\circ\,12'\,33'' \end{array} \right\}$$
$$+ (1+\mu^{\text{vi}}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2'',09104 \sin(3n^{\text{vi}}t - 3n^{\text{v}}t + 3\varepsilon^{\text{vi}} - 3\varepsilon^{\text{v}} - 66^\circ\,55'\,29'') \\ + 30'',89364 \sin(3n^{\text{vi}}t - n^{\text{v}}t + 3\varepsilon^{\text{vi}} - \varepsilon^{\text{v}} - 87^\circ\,28'\,7''). \end{array} \right\}$$

$3n^{\text{v}} - n^{\text{iv}}$ étant une fort petite quantité, cette circonstance rend très sensible l'inégalité dépendante de l'angle $3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t$. Cette inégalité a été calculée par les formules (A) du n° 34; comme sa période est très longue, elle devra pour plus d'exactitude être ajoutée au moyen mouvement de Saturne.

Si l'on réunit les inégalités dépendantes de $n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t$ et de $3n^{\text{v}}t - 3n^{\text{iv}}t$ avec les inégalités relatives aux mêmes argumens et indépendantes des excentricités et des inclinaisons, on aura pour leur somme,

$$+ (1+\mu^{\text{iv}})\, 29'',39700 \sin(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}} + 77^\circ\,45'\,26'')$$
$$- (1+\mu^{\text{vi}})\, 2'',05941 \sin(3n^{\text{vi}}t - 3n^{\text{v}}t + 3\varepsilon^{\text{vi}} - 3\varepsilon^{\text{v}} + 69^\circ\,6'\,19'').$$

on a ensuite, relativement au rayon vecteur,

$$\delta r^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}) \cdot \left\{ \begin{array}{l} +(0,01479844 - t\,0,0000007337) \cos(2n^{\text{iv}}t - 4n^{\text{v}}t + 2\varepsilon^{\text{iv}} - 4\varepsilon^{\text{v}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 59^\circ\,28'\,9'' - t\,63'',24) \\ - 0,00118571 \cos(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}} - 90^\circ\,12'\,32'') \\ - 0,000569213 \cos(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}} + 83^\circ\,26'\,32''). \end{array} \right\}$$

En réunissant la dernière de ces inégalités à celle qui est relative au même argument et qui est indépendante des excentricités et des inclinaisons, on aura la suivante,

$$(1+\mu^{\text{iv}})\, 0,00762657 \cos(n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}} - 4^\circ\,15'\,8'').$$

Grande inégalité de Saturne, dépendante du cube et des cinquièmes puissances des excentricités et des inclinaisons, ainsi que du carré de la force perturbatrice.

La partie principale de la grande inégalité de Saturne, est celle qui a pour diviseur la quantité $(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^2$, et qui est du troisième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et du premier relativement à la force perturbatrice. Cette partie de la grande inégalité de Saturne est liée à la partie correspondante de la grande inégalité de Jupiter par l'équation de condition,

$$\delta v^{\text{v}} = -\frac{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}}{m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}} \cdot \delta v^{\text{iv}}.$$

En ne considérant donc que cette partie de la valeur de δv^{iv} et en la multipliant par $-\frac{m^{\text{iv}}}{m^{\text{v}}}\sqrt{\frac{a^{\text{iv}}}{a^{\text{v}}}}$, on aura relativement à Saturne ;

$$-(2985'',04341 - t\,0'',0604093 - t^2\,0'',00019176)\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}),$$
$$-(120'',79567 - t\,1'',1075773 + t^2\,0'',00004890)\cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}).$$

L'expression de la grande inégalité de Saturne, se compose de plusieurs autres parties. Elle renferme d'abord la fonction suivante,

$$-\frac{2m^{\text{iv}}n^{\text{v}}}{5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}2}\dfrac{dP'}{da^{\text{v}}}\sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}) \\ -a^{\text{v}2}\dfrac{dP}{da^{\text{v}}}\cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}). \end{array}\right\}$$

pour réduire cette fonction en nombres, il faut d'abord calculer les quantités $a^{\text{v}2}\frac{dM^{(0)}}{da^{\text{v}}}$, $a^{\text{v}2}\frac{dM^{(1)}}{da^{\text{v}}}$, etc.,

on a pour cela l'équation générale

$$a^{\text{v}} \frac{dM^{(i)}}{da^{\text{v}}} + a^{\text{iv}} \frac{dM^{(i)}}{da^{\text{iv}}} = - M^{(i)};$$

d'où l'on peut conclure les valeurs des différences $a^{\text{v}} \frac{dM^{(0)}}{da^{\text{v}}}$, $a^{\text{v}} \frac{dM^{(1)}}{da^{\text{v}}}$, etc., celles des différences $a^{\text{iv}} \frac{dM^{(0)}}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{iv}} \frac{dM^{(1)}}{da^{\text{iv}}}$, etc., étant connues. La valeur de $N^{(0)}$ doit être prise pour celle de $N^{(1)}$, et réciproquement dans le n° 100. De l'équation précédente, on déduit d'ailleurs les deux suivantes,

$$a^{\text{v}} \frac{dP}{da^{\text{v}}} + a^{\text{iv}} \frac{dP}{da^{\text{iv}}} = - P,$$

$$a^{\text{v}} \frac{dP'}{da^{\text{v}}} + a^{\text{iv}} \frac{dP'}{da^{\text{iv}}} = - P';$$

au moyen de ces formules, on a trouvé pour 1800,

$$a^{\text{v}} \frac{dP}{da^{\text{v}}} = - 0{,}001220232,$$

$$a^{\text{v}} \frac{dP'}{da^{\text{v}}} = - 0{,}004465564,$$

et pour l'année 2000,

$$a^{\text{v}} \frac{dP}{da^{\text{v}}} = - 0{,}0013106034,$$

$$a^{\text{v}} \frac{dP'}{da^{\text{v}}} = - 0{,}004364999.$$

D'après ces valeurs, la fonction précédente était en 1800 égale à

$$+ 49'',39049 \sin (5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}})$$
$$- 13'',49613 \cos (5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}),$$

et en 2000 égale à

$$+48'',27821 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-14'',49567 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

d'où l'on a conclu, pour un temps quelconque t, la valeur de cette même fonction égale à

$$(49'',39049 - t0'',0055614)\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$-(13'',49613 + t0'',0049977)\cos(5n^{v}t - 2nt^{iv} + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

L'expression de la grande inégalité de Saturne, contient encore le terme

$$-\tfrac{1}{2}e^{v}h'\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + \omega^{v} + \delta'),$$

en désignant par $2h'\sin(4n^{v}t - 2n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + \delta')$, l'inégalité de δv^{v}, dépendante de l'angle $4n^{v}t - 2n^{iv}t$; d'après cela, en réduisant en nombres la fonction précédente, on trouve qu'en 1800 elle était égale à

$$7'',66975 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}),$$
$$+4'',68011 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

et en 2000 elle deviendra

$$7'',14086 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv})$$
$$+5'',13753 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

d'où l'on conclut, pour un temps quelconque t, l'inégalité,

$$(7'',66975 - t0'',0026444)\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}),$$
$$+(4'',68011 + t0'',0022871)\cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

La partie de la grande inégalité de Saturne dépen-

dante des cinquièmes puissances et des produits de cinq dimensions des excentricités et des inclinaisons, peut se déduire de la partie correspondante de la grande inégalité de Jupiter, en multipliant celle-ci par $-\frac{m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}}}{m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}}}$; on trouve ainsi cette partie égale à

$$+(26'',25388 - t\,0'',00486776)\sin(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}),$$
$$-(20'',91307 + t\,0'',00861016)\cos(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}).$$

Quant à la partie sensible de la grande inégalité de Saturne, qui dépend du carré de la force perturbatrice, on la déterminera par les formules du n° 57. En ne considérant que les termes de cet ordre, on a

$$\delta v^{\text{V}} = -3a^{\text{V}}n^{\text{V}}\int dt\int d'.\delta\text{R}' + \tfrac{3}{2}a^{\text{V}2}n^{\text{V}}\int dt\left(\int d'\text{R}'\right)^2,$$

le dernier terme de cette formule donne l'inégalité suivante,

$$2'',17020\sin(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}) + 0'',23185\cos(5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\epsilon^{\text{V}} - 2\epsilon^{\text{IV}}).$$

Cette inégalité est la seule que fournisse la seconde partie de la formule précédente; considérons donc uniquement son premier terme; on a, n° 47,

$$\delta\text{R} = \frac{d\text{R}}{dr}\delta r + \frac{d\text{R}}{dv}\delta v + \frac{d\text{R}}{ds}\delta s + \frac{d\text{R}}{dr'}\delta r' + \frac{d\text{R}}{dv'}\delta v' + \frac{d\text{R}}{ds'}\delta s';$$

et pour obtenir la valeur complète de δv^{V}, il faut combiner entre eux les différens termes de chacun des facteurs qui entrent dans la valeur de δR, de manière que la somme ou la différence des argumens des termes que l'on a considérés, soit égale à $5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t$, et que la somme des exposans des excentricités et des inclinaisons dans ces termes ne dépasse

pas trois. On a trouvé de cette manière les résultats suivans.

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $5n^{v}t - 2n^{iv}t$ *et* o :

$$13'',03344 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) + 0'',81669 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $4n^{v}t - 2n^{iv}t$ *et* $n^{v}t$,

$$-0'',89624 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) - 1'',37730 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $3n^{v}t - 2n^{iv}t$ *et* $2n^{v}t$.

$$1'',48333 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) + 3'',04340 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la combinaison des argumens $2n^{v}t - 2n^{iv}t$ *et* $3n^{v}t$,

$$0'',22091 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) + 0'',23748 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $3n^{v}t - n^{iv}t$ *et* $2n^{v}t - n^{iv}t$,

$$1'',85702 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) - 1'',18481 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv});$$

Inégalité résultante de la double combinaison des argumens $3n^{v}t - n^{iv}t$ *et* $2n^{v}t - n^{iv}t$,

$$3'',46607 \sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}) - 40'',36260 \cos(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv}).$$

Cette inégalité a été calculée en réduisant en nombres les formules des n°s 60 et 61. On sait que Laplace s'était contenté de déterminer cette partie de la grande inégalité dépendante du carré de la force perturbatrice ; mais outre qu'une erreur de signes rendait fautif le résultat auquel il était parvenu, on voit qu'il avait à tort négligé plusieurs inégalités du même ordre

que celles dont il avait tenu compte, et qui doivent concourir à former la partie de la grande inégalité que nous considérons en ce moment.

Inégalité résultante de la combinaison par voie de soustraction des argumens $7n^{v}t - 4n^{iv}t$ *et* $2n^{v}t - 2n^{iv}t$,

$$-16'',06895\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})+1'',95914\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la combinaison semblable des argumens $6n^{v}t - 3n^{iv}t$ *et* $n^{v}t - n^{iv}t$,

$$6'',04586\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})+2'',23454\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

Inégalité résultante de la combinaison semblable des argumens $7n^{v}t - 5n^{iv}t$ *et* $2n^{v}t - 3n^{iv}t$,

$$-0'',54808\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})+1'',29603\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

En réunissant les dix inégalités précédentes, on trouvera que leur somme est égale à

$$+10'',76356\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})-33'',10558\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

Cette inégalité se rapporte au moyen mouvement de Saturne; en réduisant en nombres les formules du nº 63, on trouve pour l'inégalité correspondante de la longitude de l'époque,

$$-9'',82477\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})-1'',02670\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

En réunissant cette inégalité à la précédente, on aura la valeur entière de la partie que le carré de la force perturbatrice ajoute à la grande inégalité de Saturne; on trouve ainsi que cette partie est égale à

$$0'',93879\sin(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv})-34'',13228\cos(5n^{v}t-2n^{iv}t+5\varepsilon^{v}-2\varepsilon^{iv}).$$

En rassemblant maintenant les diverses parties de la grande inégalité de Saturne, on aura pour sa valeur

totale,

$$-(1+\mu^{\text{iv}})\left\{\begin{array}{l}(2900'',79050 - t\,0'',0473357 - t^2\,0'',00019176)\sin\left\{\begin{array}{l}5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t\\ +5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}\end{array}\right\}\\ +\,(184'',65704 - t\,1'',0962565 + t^2\,0'',00004890)\cos\left\{\begin{array}{l}5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t\\ +5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}.\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

Eu réduisant les deux termes de cette inégalité en un seul, par la méthode du n° 30, on aura

$$-(1+\mu^{\text{iv}})\left\{\begin{array}{l}2906'',66060 - t\,0'',11410940\\ +\,t^2\,0'',0000051972\end{array}\right\}\sin\left\{\begin{array}{l}5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}\\ +\,3°38'32'' - t\,76'',598\\ -\,t^2\,0'',001164.\end{array}\right\}$$

Cette grande inégalité, ainsi que celle de Jupiter qui lui correspond, peut avoir encore besoin de correction, soit à cause de l'incertitude qui reste sur les masses de Saturne et de Jupiter, soit en vertu de quelques-unes des inégalités dépendantes du carré de la force perturbatrice que nous avons négligées; mais ces corrections doivent être nécessairement très légères; l'inégalité précédente, comme nous l'avons dit n° 65, doit s'ajouter au moyen mouvement de Saturne.

Le carré de la force perturbatrice produit encore dans l'expression de la longitude vraie le terme

$$\frac{9m^{\text{v}2}n^{\text{iv}4}a^{\text{iv}2}a}{2(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^4}\left(\frac{5m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}} + 2m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}}}{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}}\right)\left\{\begin{array}{l}(P'^2 - P^2)\sin 2(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}})\\ -2PP'\cos 2(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}}),\end{array}\right\}$$

auquel, pour en faciliter le calcul, on peut, comme dans la théorie de Jupiter, faire prendre la forme,

$$\frac{\overline{H}'^2}{8}\,\frac{(5m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}} + 2m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}})}{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}}\sin\text{(double de l'argument de la grande inégalité)},$$

$\overline{H}'\sin(2n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{iv}} - 5\epsilon^{\text{v}} - B')$ étant la grande

inégalités de Saturne. En réduisant cette formule en nombres, elle donne l'inégalité suivante,

$$+29'',76156 \sin 2(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + 3^\circ 38' 32'').$$

Parmi les inégalités du second ordre, l'expression de la longitude de Saturne, contient encore la suivante,

$$\frac{1}{4}\,\frac{(3m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}} + 2m^{\text{v}}\sqrt{a^{\text{v}}})}{m^{\text{iv}}\sqrt{a^{\text{iv}}}}\,\overline{\text{H}}'\text{K}' \sin(9n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 9\epsilon^{\text{v}} - 4\epsilon^{\text{iv}} + \text{A}' + \text{B}'),$$

On a, par ce qui précède,

$$\text{K}' = 1652'',58660, \quad \text{A}' = -59^\circ 34' 4'';$$

en réduisant en nombres l'inégalité précédente, elle devient

$$8'',76570 \sin(9n^{\text{v}}t - 4n^{\text{iv}}t + 9\epsilon^{\text{v}} - 4\epsilon^{\text{iv}} - 55^\circ 55' 32'').$$

L'expression de la longitude de Saturne contient encore l'inégalité,

$$\tfrac{5}{2}e^{\text{v}}h' \sin(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{v}} + \delta^{\text{v}}),$$

$2h'\sin(4n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 4\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + \delta^{\text{v}})$; étant l'inégalité du mouvement en longitude de Saturne dépendante de l'angle $4n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t$. Cette inégalité, réduite en nombres, était en 1800 égale à

$$45'',80384 \sin(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + 29^\circ 34' 16''),$$

et en 2000 elle sera égale à

$$44'',76493 \sin(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + 31^\circ 52' 52'');$$

d'où l'on conclura pour un temps quelconque,

$$(45'',80384 - t\,0,0051946) \sin(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - 2\epsilon^{\text{iv}} + 29^\circ 34' 16'' - t\,41'',58),$$

Si dans l'expression de la longitude vraie de Saturne en fonction de la longitude moyenne, on considère le terme

$$\frac{13}{12} e^{\mathrm{v}3} \sin(3n^{\mathrm{v}}t + 3\varepsilon^{\mathrm{v}} - 3\varpi^{\mathrm{v}}),$$

et qu'on y augmente l'excentricité et la longitude du périhélie de leurs variations, on aura la fonction

$$\frac{13}{4} e^{\mathrm{v}2} \left\{ \begin{array}{c} \delta e^{\mathrm{v}} \sin 3(n^{\mathrm{v}}t + \varepsilon^{\mathrm{v}} - \varpi^{\mathrm{v}}) \\ - e^{\mathrm{v}} \delta\varpi^{\mathrm{v}} \cos 3(n^{\mathrm{v}}t + \varepsilon^{\mathrm{v}} - \varpi^{\mathrm{v}}). \end{array} \right\} \quad (o)$$

Si l'on ne considère dans δe^{v} et $\delta\varpi^{\mathrm{v}}$ que la partie dépendante de l'angle $5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t$, on aura nº 36,

$$2\delta e^{\mathrm{v}} = -\mathrm{K}' \cos(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varpi^{\mathrm{v}} + \mathrm{A}'),$$

$$2e^{\mathrm{v}}\delta\varpi^{\mathrm{v}} = -\mathrm{K}' \sin(5n^{\mathrm{v}}t - 2n^{\mathrm{iv}}t + 5\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varpi^{\mathrm{v}} + \mathrm{A}'),$$

en désignant par $-\mathrm{K}'\sin(2n^{\mathrm{iv}}t - 4n^{\mathrm{v}}t + 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - 4\varepsilon^{\mathrm{v}} - \mathrm{A}')$, l'inégalité du mouvement de Saturne, dépendante de l'angle $2n^{\mathrm{iv}}t - 4n^{\mathrm{v}}t$.

En substituant pour K′ et A′ leurs valeurs, on en conclura que la fonction (o) devient

$$-\frac{13}{8} e^{\mathrm{v}2}\, 652'',5866 \sin(2n^{\mathrm{iv}}t - 2n^{\mathrm{v}}t + 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - 2\varepsilon^{\mathrm{v}} - 2\varpi^{\mathrm{v}} + 59^\circ 34' 4'').$$

Cette quantité, réduite en nombres, est égale à

$$-4'',2092 \sin(2n^{\mathrm{iv}}t - 2n^{\mathrm{v}}t + 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - 2\varepsilon^{\mathrm{v}} - 118^\circ 42' 36'');$$

en la réunissant à l'inégalité

$$-(1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 31'',887151 \sin 2(n^{\mathrm{iv}}t - n^{\mathrm{v}}t + \varepsilon^{\mathrm{iv}} - \varepsilon^{\mathrm{v}}),$$

que nous avons trouvée précédemment, et qui dépend des simples excentricités, on aura la suivante,

$$-(1 + \mu^{\mathrm{iv}})\, 30'',092435 \sin(2n^{\mathrm{iv}}t - 2n^{\mathrm{v}}t + 2\varepsilon^{\mathrm{iv}} - 2\varepsilon^{\mathrm{v}} - 7^\circ 2' 49'').$$

Considérons les inégalités du second ordre, résultantes de la variation des excentricités et des périhélies dans les termes de l'expression de la longitude vraie, qui dépendent de la première puissance des forces perturbatrices. Elles sont beaucoup plus sensibles que les inégalités correspondantes de Jupiter. L'expression de δv^{v} contient les deux inégalités suivantes,

$$e^{v}G' \sin(f + n^{v}t + \varepsilon^{v} - \varpi^{v})$$
$$+ e^{iv}H' \sin(f + n^{v}t + \varepsilon^{v} - \varpi^{iv}),$$

en supposant $f = i(n^{v}t - n^{iv}t + \varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv})$. Si l'on augmente dans ces deux fonctions les excentricités et les périhélies de leurs variations δe^{v}, $\delta\varpi^{v}$, δe^{iv}, $\delta\varpi^{iv}$, on démontrera comme dans le n° 100, qu'il en résultera les inégalités suivantes,

$$-\frac{K'G'}{2}\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - f - n^{v}t - \varepsilon^{v} + A'),$$

$$+\frac{KH'}{2}\sin(5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - f - n^{v}t - \varepsilon^{iv} + A),$$

en représentant par $K' \sin(4n^{v}t - 2n^{iv}t + 4\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} + A')$ l'inégalité du mouvement de Saturne dépendante de l'angle $4n^{v}t - 2n^{iv}t$, et par $K \sin(5n^{v}t - 3n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 3\varepsilon^{iv} + A)$ l'inégalité du mouvement de Jupiter qui dépend de l'angle $5n^{v}t - 3n^{iv}t$.

L'expression de δv^{v} renferme les quatre inégalités suivantes, dépendantes des simples excentricités :

$$-184'',142338 \sin(2n^{v}t - n^{iv}t + 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{v}),$$
$$+423'',017880 \sin(2n^{v}t - n^{iv}t - 2\varepsilon^{v} - \varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}),$$
$$+34'',704748 \sin(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{v}),$$
$$-17'',906457 \sin(3n^{v}t - 2n^{iv}t + 3\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} - \varpi^{iv}),$$

l'inégalité du mouvement de Saturne en longitude,

$$-652'',58660 \sin(2n^{\text{iv}}t - 4n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{iv}} - 4\epsilon^{\text{v}} + 59^\circ 34' 4''),$$

combinée avec la première et la troisième des inégalités précédentes, donnera les deux suivantes,

$$+\frac{184'',142338}{2e^{\text{v}}}.652'',58660 \sin(n^{\text{iv}}t - 3n^{\text{v}}t + \epsilon^{\text{iv}} - 3\epsilon^{\text{v}} + 59^\circ 34' 4'')$$

$$-\frac{34'',704748}{2e^{\text{v}}}.652'',58660 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 59^\circ 34' 4'').$$

l'inégalité de Jupiter,

$$+161'',14937 \sin(3n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 3\epsilon^{\text{iv}} - 5\epsilon^{\text{v}} + 58^\circ 11' 34''),$$

combinée avec la seconde et la quatrième de ces mêmes inégalités, produira celle-ci,

$$\frac{423'',017880}{2e^{\text{iv}}}\ 161'',14937 \sin(n^{\text{iv}}t - 3n^{\text{v}}t + \epsilon^{\text{iv}} - 3\epsilon^{\text{v}} + 58^\circ 11' 34'')$$

$$\frac{17'',906457}{2e^{\text{iv}}}\ 161'',14937 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 58^\circ 11' 34'').$$

En substituant pour e^{iv} et e^{v} leurs valeurs relatives à 1800, les inégalités précédentes donneront dans l'expression de δv^{v} les quatre suivantes,

$$-5'',18779 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - 59^\circ 34' 4''),$$
$$-3'',43111 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} - 58^\circ 11' 34''),$$
$$+0'',97773 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 59^\circ 34' 4''),$$
$$+0'',14524 \sin(2n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{v}} - 58^\circ 11' 34'');$$

en réunissant les deux premières inégalités à la suivante,

$$-55'',51470 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\epsilon^{\text{v}} - \epsilon^{\text{iv}} + 84^\circ 7' 57''),$$

qui dépend du carré des excentricités, on aura

celle-ci,

$$-48'',89204 \sin(3n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}} + 78°3'55'').$$

Il nous reste à considérer les inégalités du rayon vecteur de Saturne. On a vu, n° 38, que son expression renferme les termes suivans,

$$\frac{10m^{\text{iv}}n^{\text{v}}}{5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}}}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}}P \sin(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}}) \\ + a^{\text{v}}P' \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\},$$

$$-e^{\text{v}}h' \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}} + \delta'),$$

$$+e^{\text{v}}h' \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} + \varpi^{\text{v}} + \delta').$$

Cette fonction, réduite en nombres, donne

$$\delta r^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 0,000946678 \cos(5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} + 32°32'11'') \\ +0,000830938 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} + 29°40'11''). \end{array}\right\}$$

En réunissant la dernière de ces inégalités aux suivantes qui dépendent des simples excentricités,

$$(1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 0,00117242 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{v}}) \\ -0,00063065 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varpi^{\text{iv}}), \end{array}\right\}$$

on aura

$$\delta r^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{v}})\ 0,00155290 \cos(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - 38°55'9'').$$

Inégalités du mouvement de Saturne en latitude.

103. Par les formules du n° 95, livre II, on a

$$\delta s^{\text{v}} = (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 1'',809686 \sin(n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \Pi^{\text{v}}) \\ -0'',253305 \sin(2n^{\text{iv}}t - n^{\text{v}}t + 2\varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{v}}) \\ +3'',182793 \sin(2n^{\text{v}}t - n^{\text{iv}}t + 2\varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{iv}} - \Pi^{\text{v}}) \\ -0'',529395 \sin(3n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 3\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} - \Pi^{\text{v}}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{vi}).\left\{\begin{array}{l} +\ 0'',123730 \sin (2n^{vi}t - n^{v}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} - \Pi^{vi}) \\ +\ 0'',671272 \sin (3n^{vi}t - 2n^{v}t + 3\epsilon^{vi} - 2\epsilon^{v} - \Pi^{vi}), \end{array}\right\}$$

Π^{v} étant la longitude du nœud de l'orbite de Jupiter et Π^{vi} la longitude du nœud de l'orbite d'Uranus sur l'orbite de Saturne.

Les formules du n° 40, réduites en nombres donnent l'inégalité,

$$\delta s^{v} = -(1+\mu^{iv})\, 9'',306268 \sin (4n^{v}t - 2n^{iv}t + 4\epsilon^{v} - 2\epsilon^{iv} - 60^{\circ}\, 23'\, 54'').$$

En appliquant à Saturne ce que nous avons dit n° 101, relativement à Jupiter, on verra que les termes dépendans du carré de la force perturbatrice, ajoutent à la valeur de $\frac{d\phi^{v}}{dt}$ la quantité,

$$\frac{m^{iv}\sqrt{a^{iv}}}{m^{iv}\sqrt{a^{iv}} + m^{v}\sqrt{a^{v}}}\left[\frac{\delta\gamma}{t}\cos(\Pi - \epsilon^{v}) - \frac{\gamma\delta\Pi}{t}\sin(\Pi - \epsilon^{v})\right];$$

et à la valeur de $\frac{d\epsilon^{v}}{dt}$ la quantité,

$$\frac{m^{iv}\sqrt{a^{iv}}}{\phi^{v}(m^{iv}\sqrt{a^{iv}} + m^{v}\sqrt{a^{v}})}\left[\frac{\delta\gamma}{t}\sin(\Pi - \epsilon^{v}) + \frac{\gamma\delta\Pi}{t}\cos(\Pi - \epsilon^{v})\right],$$

$\delta\gamma$ et $\gamma\delta\Pi$ étant déterminés par les formules du n° 54. La première des fonctions précédentes, réduite en nombres, est égale à

$$0'',0001554\,;$$

elle doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\phi^{v}}{dt}$ et de $\frac{d\phi_{\prime}^{v}}{dt}$, du n° 91. La seconde fonction, en la réduisant en nombres, donne

$$-\ 0,001896,$$

quantité qui doit être ajoutée aux valeurs de $\frac{d\epsilon^{v}}{dt}$ et

de $\frac{d\varpi_{\prime}^{v}}{dt}$, du même numéro; on aura ainsi

$$\frac{d\varphi^{v}}{dt} = -0,1006184,$$

$$\frac{d\varphi_{\prime}^{v}}{dt} = -0,1420116,$$

$$\frac{d\varpi^{v}}{dt} = 9,13905,$$

$$\frac{d\varpi_{\prime}^{v}}{dt} = -18,90219.$$

CHAPITRE XIX.

Théorie d'Uranus.

104. L'équation *maximum*

$$\delta a = (1 - a^2)\,\delta V,$$

donnée n° 100, devient, relativement à Uranus,

$$\delta r^{\text{vi}} = -\frac{r^{\text{vi}\,2}}{r''}(1 - a^2)\,\delta V^{\text{vi}}.$$

En prenant donc pour r'' et r^{vi} les moyennes distances de la Terre et d'Uranus au Soleil, et en supposant $\delta v^{\text{vi}} = \pm 1''$, on aura

$$\delta r^{\text{vi}} = \mp 0{,}00177926.$$

On pourra donc négliger les inégalités du rayon vecteur au-dessous de $\pm$ 0,00177. Nous négligerons d'ailleurs, comme d'ordinaire, les inégalités du mouvement en longitude et en latitude au-dessous d'un dixième de seconde.

Inégalités d'Uranus indépendantes des excentricités.

$$v^{\text{vi}} - (1+\mu^{\text{iv}}).\left\{\begin{array}{l} 52'',959460 \sin\ (n^{\text{iv}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{vi}}) \\ - 0'',192744 \sin 2(n^{\text{iv}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{iv}} - \varepsilon^{\text{vi}}) \end{array}\right\}$$

$$+ (1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 20'',442766 \sin\ (n^{\text{v}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{vi}}) \\ - 4'',036946 \sin 2(n^{\text{v}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{vi}}) \\ - 0'',824654 \sin 3(n^{\text{v}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{vi}}) \\ - 0'',133452 \sin 4(n^{\text{v}}t - n^{\text{vi}}t + \varepsilon^{\text{v}} - \varepsilon^{\text{vi}}); \end{array}\right\}$$

$$\delta r^{vi} = (1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l} 0{,}0064266073 \\ +\ 0{,}0049525845 \cos(n^{iv}t - n^{vi}t + \epsilon^{iv} - \epsilon^{vi}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} 0{,}0022614468 \\ +\ 0{,}0033894254 \cos(n^{v}t - n^{vi}t + \epsilon^{v} - \epsilon^{vi}). \end{array}\right\}$$

Inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités.

$$\delta v^{vi} = (1+\mu^{iv}).\left\{\begin{array}{l} -\ 1'',246655 \sin(n^{iv}t + \epsilon^{iv} - \varpi^{vi}) \\ +\ 1'',278946 \sin(2n^{iv}t - n^{vi}t + 2\epsilon^{iv} - \epsilon^{vi} - \varpi^{iv}) \\ -\ 3'',675114 \sin(2n^{vi}t - n^{iv}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{iv} - \varpi^{vi}) \\ -\ 0'',225300 \sin(2n^{vi}t - n^{iv}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{iv} - \varpi^{iv}) \end{array}\right\}$$

$$+(1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} -\ 1'',338882 \sin(n^{v}t + \epsilon^{v} - \varpi^{vi}) \\ +\ 0'',205251 \sin(n^{v}t + \epsilon^{v} - \varpi^{v}) \\ -\ 0'',209839 \sin(2n^{v}t - n^{vi}t + 2\epsilon^{v} - \epsilon^{vi} - \varpi^{vi}) \\ +\ 0'',839472 \sin(2n^{v}t - n^{vi}t + 2\epsilon^{v} - \epsilon^{vi} - \varpi^{v}) \\ -42'',057639 \sin(2n^{vi}t - n^{v}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} - \varpi^{vi}) \\ +(143'',109660 - t\,0'',0079448)\sin(2n^{vi}t - n^{v}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} - \varpi^{v}) \\ +\ 2'',373656 \sin(3n^{vi}t - 2n^{v}t + 3\epsilon^{vi} - 2\epsilon^{v} - \varpi^{vi}) \\ -\ 1'',569014 \sin(3n^{vi}t - 2n^{v}t + 3\epsilon^{vi} - 2\epsilon^{v} - \varpi^{v}) \\ +\ 0'',409323 \sin(4n^{vi}t - 3n^{v}t + 4\epsilon^{vi} - 3\epsilon^{v} - \varpi^{vi}) \\ -\ 0'',269200 \sin(4n^{vi}t - 3n^{v}t + 4\epsilon^{vi} - 3\epsilon^{v} - \varpi^{v}) \\ +\ 0'',120767 \sin(5n^{vi}t - 4n^{v}t + 5\epsilon^{vi} - 4\epsilon^{v} - \varpi^{vi}), \end{array}\right\}$$

$$\delta r^{vi} = (1+\mu^{v})\ 0{,}0061835858 \cos(2n^{vi}t - n^{v}t + 2\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} - \varpi^{v}).$$

Inégalités dépendantes des carrés et des produits des excentricités et des inclinaisons des orbites.

$$\delta v^{iv} = (1+\mu^{v}).\left\{\begin{array}{l} -(126'',751206 - t\,0'',014520)\sin(3n^{vi}t - n^{v}t + 3\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} \\ \qquad\qquad - 88°\,19'\,6'' - t\,17'',305 \\ +\ 1'',639003 \sin(4n^{vi}t - 2n^{v}t + 4\epsilon^{vi} - 2\epsilon^{v} - 38°\,34'\,53'') \\ +\ 8'',0160300 \sin(n^{v}t - n^{vi}t + \epsilon^{v} - \epsilon^{vi} + 88°\,29'\,39''). \end{array}\right\}$$

La dernière de ces inégalités peut être réunie à l'inégalité relative au même argument et indépendante des excentricités; leur somme donne la suivante :

$$(1+\mu^{v})\,22'',150110 \sin(n^{v}t - n^{vi}t + \epsilon^{v} - \epsilon^{vi} + 21°\,11'\,4'').$$

Pour les inégalités du rayon vecteur on a

$$\delta r^{vi} = -(1+\mu^{v})\ 0{,}000722562 \cos(3n^{vi}t - n^{v}t + 3\epsilon^{vi} - \epsilon^{v} + 75°\,0'\,41'').$$

Inégalités dépendantes des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons.

$$\delta v^{\text{vI}} = -(1+\mu^{\text{v}})\; 0'',99000 \sin(5n^{\text{vI}}t - 2n^{\text{v}}t + 5\epsilon^{\text{vI}} - 2\epsilon^{\text{v}} + 68^\circ\, 23'\, 31'').$$

Inégalités du mouvement d'Uranus en latitude.

Les seules inégalités de la latitude d'Uranus qui puissent être sensibles sont celles qui sont indépendantes des excentricités et qui ne dépendent que de la première puissance des inclinaisons. Elles ont été déterminées par les formules du n° 95 du livre II :

$$\delta s^{\text{vI}} = (1+\mu^{\text{Iv}})\quad 0'',662046 \sin(n^{\text{Iv}}t + \epsilon^{\text{Iv}} - \Pi^{\text{Iv}})$$
$$+ (1+\mu^{\text{v}}).\left\{\begin{array}{l} 0'',876523 \sin(n^{\text{v}}t + \epsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{v}}) \\ +2'',794129 \sin(2n^{\text{vI}}t - n^{\text{v}}t + 2\epsilon^{\text{vI}} - \epsilon^{\text{v}} - \Pi^{\text{v}}), \end{array}\right\}$$

en désignant par Π^{Iv} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter, et par Π^{v} la longitude du nœud ascendant de l'orbite de Saturne sur celle d'Uranus.

CHAPITRE XX.

Équations de condition qui existent entre les inégalités planétaires et qui peuvent servir à vérifier leurs valeurs.

105. Nous avons eu plusieurs fois l'occasion de reconnaître que les inégalités à longue période de deux planètes m et m' soumises à leur action réciproque, étaient liées par la même équation de condition que les variations séculaires, c'est-à-dire qu'elles étaient à très peu près entre elles dans le rapport de $m\sqrt{a}$ à $m'\sqrt{a'}$; ce qui résulte de ce que la partie la plus sensible de ces inégalités est celle qui dépend de la variation du moyen mouvement dans l'expression de la longitude vraie. C'est au moyen de cette relation, qui est d'autant plus exacte, que par le rapport qui existe entre les moyens mouvemens des deux planètes, la période de l'inégalité devient plus longue, que nous avons déduit l'inégalité de Vénus, résultant de l'action de la Terre, et dépendante de l'angle $13n''t - 8n't$ de l'inégalité correspondante de la Terre, et ensuite la partie de la grande inégalité de Saturne qui a pour diviseur $(5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}})^2$, et qui dépend de la première

puissance de la force perturbatrice de la partie correspondante de Jupiter. On pourrait se servir de cette même relation pour vérifier toutes les inégalités à longues périodes, que nous avons considérées dans les chapitres précédens, et qui ont été calculées séparément; mais comme leurs valeurs ont été déterminées avec soin, et qu'elles ont déjà subi plusieurs vérifications, il serait superflu de nous y arrêter.

Les inégalités dépendantes de la première puissance des excentricités et des inclinaisons méritent une attention particulière, à cause de leur grandeur et de leur multiplicité. Ces inégalités peuvent devenir considérables dans deux cas; 1°. si la quantité $i(n'-n)+n$ est très petite par rapport à n ou n'; 2°. si cette quantité diffère peu d'être égale à $-n$; parce qu'alors $i(n'-n)+2n$ étant une très petite quantité, les termes affectés de ce diviseur acquièrent une valeur sensible.

Or, dans le premier cas, l'inégalité dépendante de l'argument $i(n't-nt)+nt$ croît avec une grande lenteur, et par conséquent, les deux inégalités correspondantes de m et de m' sont liées entre elles par le rapport commun à toutes les inégalités de ce genre, c'est-à-dire que le coefficient de l'inégalité de m' se déduira du coefficient de l'inégalité de m en multipliant celui-ci par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$. En effet, dans ce cas, il est évident que les termes les plus considérables de l'expression de la longitude dans le mouvement troublé, proviendront de la variation du moyen mouvement, à cause du diviseur $[i(n'-n)+n]^2$

que l'intégration leur fait acquérir; considérons dans le développement de la fonction R les termes de la forme

$$m'M^{(0)}e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\omega]$$
$$+m'M^{(1)}e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\omega'].$$

L'expression de la fonction R' relative à l'action de m sur m' renfermera les termes

$$mM^{(0)}e\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\omega]$$
$$+m'M^{(1)}e'\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\omega'].$$

Si l'on suppose donc $i(n'-n)+n$ une très petite quantité, en n'ayant égard qu'à ces termes, on aura à très peu près

$$m\int d\text{R}+m'\int d'\text{R}'=0.$$

Et, par conséquent, d'après ce que nous avons vu au n° 42, en ne considérant dans δv et $\delta v'$ que les inégalités qui dépendent de l'argument $i(n't-nt)+nt$, on aura entre elles, à très peu près, l'équation de condition

$$m\sqrt{a}\,\delta v+m'\sqrt{a'}\,\delta v'=0.$$

Prenons pour exemple l'inégalité de Vénus résultant de l'action de la Terre et dépendante de l'argument $3n''t-2n't$.

Cette inégalité est, par le n° 96,

$$-1'',426900\sin(3n''t-2n't+3\varepsilon''-2\varepsilon'-\omega').$$

En multipliant par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}=-1,042703$ son

coefficient, on a pour l'inégalité correspondante de la Terre

$$+1'',48783 \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi').$$

Le calcul direct a donné

$$+1'',13110 \sin(3n''t - 2n't + 3\varepsilon'' - 2\varepsilon' - \varpi');$$

résultat qui diffère peu du précédent.

106. Supposons maintenant que $i(n'-n)+2n$ soit une très petite quantité par rapport à n ou à n'. Il est aisé de voir, n° 84, livre II, qu'alors la partie des inégalités de m et de m' dépendantes de l'argument $i(n't-nt)+nt$, qui a pour diviseur $i(n'-n)+2n$, et qui, par conséquent, est la plus considérable, provient de la variation de l'équation du centre dans l'expression de la longitude vraie, on peut donc, dans ce cas, se borner à considérer cette partie. Le développement de la fonction R renferme un terme de cette forme :

$$m'M^{(1)}ee' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'];$$

il en résultera, n° 81, livre II, dans δe et $\delta\varpi$, les inégalités suivantes :

$$\delta e = \frac{m'an}{i(n'-n)+2n} M^{(1)}e' \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'],$$

$$e\delta\varpi = \frac{m'an}{i(n'-n)+2n} M^{(1)}e' \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon - \varpi - \varpi'].$$

L'expression de la longitude dans le mouvement troublé contient les deux termes

$$2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e\delta\varpi \cos(nt + \varepsilon - \varpi).$$

En vertu des inégalités précédentes, on aura donc dans δv celle-ci :

$$-\frac{2m'an}{i(n'-n)+2n} M^{(1)}e' \sin\left[(i-1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+n't+\varepsilon'-\varpi'\right].$$

L'expression de la fonction R′ relative à l'action de m sur m' renfermera le terme

$$mM^{(1)}ee'\cos\left[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+2nt+2\varepsilon-\varpi-\varpi'\right];$$

et il en résultera, par conséquent, dans $\delta v'$ l'inégalité suivante :

$$-\frac{2ma'n'}{i(n'-n)+2n} M^{(1)}e \sin\left[(i-1)(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi\right].$$

Ces deux inégalités du mouvement de m et de m sont entre elles dans le rapport de $m'\sqrt{a'}e'$ à $m\sqrt{a}e$, en sorte que la seconde peut se conclure de la première, en multipliant le coefficient de celle-ci par $\frac{m\sqrt{a}e}{m'\sqrt{a'}e'}$.

$4n'''-2n''$ étant une quantité assez petite par rapport à n'' et même à n''', on aura dans $\delta v''$, en faisant $i=4$, une inégalité dépendante de l'argument $4n'''t-3n''t+4\varepsilon'''-3\varepsilon''-\varpi'''$, et dans $\delta v'''$ une inégalité dépendante de l'argument .... $3n'''t-2n''t+3\varepsilon'''-2\varepsilon''-\varpi''$. La première est, par le n° 97,

$$-0.557202\sin(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\varpi').$$

En multipliant son coefficient par $\frac{m''}{m'''}\sqrt{\frac{a''}{a'''}}\frac{e''}{e'''}$, il en

résultera dans $\delta v'''$ la suivante :

$$+0'',613272 \sin(3n'''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \varpi'').$$

On a trouvé par le calcul direct

$$+0'',784404 \sin(3n'''t - 2n''t + 3\varepsilon''' - 2\varepsilon'' - \varpi''),$$

résultat qui diffère peu du précédent.

107. L'inégalité de m produite par l'action de m' et dépendante de l'angle $n't + \varepsilon' - \varpi'$, résulte de la supposition de $i = 1$ dans les formules du n° 84 du second livre. Or, d'après la valeur de $[a, a']$, n° 90, il est aisé de voir que cette inégalité peut prendre cette forme

$$\frac{4n^2}{n'(n'^2 - n^2)}[a, a']e' \sin(n't + \varepsilon' - \varpi');$$

réciproquement l'inégalité de m' produite par l'action de m et dépendante de l'angle $nt + \varepsilon - \varpi$ est égale à

$$-\frac{4n'^2}{n(n'^2 - n^2)}[a', a]e \sin(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Ces deux inégalités seront donc entre elles dans le rapport de $[a, a']n^3e'$ à $[a', a]n'^3e$, et comme par le n° 90, on a

$$m'\sqrt{a'}[a', a] = m\sqrt{a}[a, a'].$$

Ces deux inégalités seront entre elles dans le rapport de $m'\sqrt{a'}n^3e'$ à $m\sqrt{a}n'^3e$ ou de $m'a^5e'$ à ma'^5e, c'est-à-dire que le coefficient de la seconde se déduira de celui de la première, en multipliant ce dernier par $-\frac{ma^5e}{m'a'^5e'}$.

L'action de Saturne sur Jupiter produit, n° 100,

dans le mouvement de Jupiter, l'inégalité

$$-9'',259026 \sin (n^{\text{v}}t+\epsilon^{\text{v}}-\varpi^{\text{v}}).$$

En la multipliant par $-\frac{m^{\text{iv}}e^{\text{iv}}a^{\text{iv}\frac{1}{2}}}{m^{\text{v}}e^{\text{v}}a^{\text{v}\frac{1}{2}}}$, on aura dans le mouvement de Saturne l'inégalité

$$+1'',276197 \sin (n^{\text{iv}}t+\epsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}}).$$

Le calcul direct a donné

$$+1'',276020 \sin (n^{\text{iv}}t+\epsilon^{\text{iv}}-\varpi^{\text{iv}});$$

ce qui diffère peu du résultat précédent.

On trouverait des relations analogues entre les inégalités correspondantes des rayons vecteurs.

108. Il résulte du n° 32 que si $i'n'-in$ est supposé une très petite quantité, l'inégalité la plus sensible de la latitude de m produite par l'action de m', sera égale à

$$\frac{2gm'Aan}{i'n'-in}\lambda^{2g-1} \sin [i'n't-(i+1)nt+i'\epsilon'-(i+1)\epsilon+\text{H}].$$

L'inégalité correspondante du mouvement en latitude de m' produite par m serait égale à

$$-\frac{2gmAa'n'}{i'n'-in}\lambda^{2g-1}\sin[(i'-1)n't-int+(i'-1)\epsilon'-i\epsilon+\text{H}].$$

Ces deux inégalités sont entre elles dans le rapport de $m\sqrt{a}$ à $-m'\sqrt{a'}$, c'est-à-dire que le coefficient de la première étant déterminé, en le multipliant par $-\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$, on aura celui de la seconde.

Nous avons déjà vérifié, au moyen de cette relation, les inégalités des mouvemens en latitude de

Jupiter et de Saturne produites par leur action réciproque; on peut vérifier de la même manière toutes les inégalités du mouvement en latitude des autres planètes. Ainsi, en supposant $i'=5$ et $i=3$, l'action de la Terre produit dans la latitude de Vénus l'inégalité

$$-0'',289097 \sin(5n''t-4n't+5\varepsilon''-4\varepsilon'-\alpha').$$

En multipliant son coefficient par $-\frac{m'\sqrt{a'}}{m''\sqrt{a''}}$, il en résultera dans le mouvement de la Terre en latitude l'inégalité

$$0'',218043 \sin(4n''t-3n't+4\varepsilon''-3\varepsilon'-\alpha').$$

En calculant directement cette inégalité, on a trouvé

$$0'',223352 \sin(4n''t-3n't+h\varepsilon''-3\varepsilon'-\alpha').$$

La différence est dans les limites des quantités négligées.

CHAPITRE XXI.

Supplément à la théorie de Jupiter et de Saturne.

109. La méthode que nous avons suivie dans les chapitres précédens, pour déterminer les inégalités des planètes résultant de leur action mutuelle, et qui est fondée sur le développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et des inclinaisons a, relativement au système des sept planètes principales, toute l'exactitude nécessaire lorsque l'on a soin de n'omettre aucune des inégalités qui peuvent devenir sensibles. Cependant nous avons indiqué, nº 25, comment on pouvait déterminer les coefficiens du développement en série de la fonction perturbatrice par le moyen des quadratures, et cette méthode donne toutes les inégalités d'une planète relatives à un même argument, indépendamment de la grandeur des excentricités et des inclinaisons, ce qui est un avantage précieux, parce que la méthode des développemens en série laisse toujours la crainte que quelqu'une des inégalités dépendantes des puissances supérieures à celles que l'on a considérées, ne devienne sensible. Nous allons donc ici

reprendre cet objet ; et comme de toutes les planètes Jupiter et Saturne sont celles dont les perturbations sont les plus considérables, nous ferons l'application de cette méthode à la théorie de ces deux planètes. Nous aurons ainsi un moyen de vérifier les résultats auxquels nous sommes parvenus dans les chapitres VI et VII, et cet exemple servira de direction aux calculateurs qui voudraient déterminer de la même manière les inégalités des autres planètes.

Si l'on nomme, comme dans le n° 25, φ et φ' les anomalies moyennes des deux planètes m et m', en sorte qu'on ait

$$\varphi = nt + \varepsilon - \varpi, \quad \varphi' = n't + \varepsilon' - \varpi';$$

qu'on suppose la fonction perturbatrice R relative à l'action de m' sur m, développée par rapport aux sinus et aux cosinus de ces anomalies, et que dans ce développement on ne considère que les termes dépendans de l'argument de la grande inégalité, on aura

$$R = m'K \sin(5\varphi' - 2\varphi) + m'K' \cos(5\varphi' - 2\varphi),$$

et pour déterminer K et K', on aura

$$m'K = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \sin(5\varphi' - 2\varphi)d\varphi d\varphi',$$

$$m'K' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \cos(5\varphi' - 2\varphi)d\varphi d\varphi'.$$

Les intégrales doubles devant s'étendre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$, et depuis $\varphi' = 0$ jusqu'à $\varphi' = 2\pi$.

Les valeurs de ces intégrales dépendront des quatre suivantes :

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \cos 2\varphi \cos 5\varphi' d\varphi d\varphi', \\ B &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \sin 2\varphi \sin 5\varphi' d\varphi d\varphi', \\ C &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \sin 2\varphi \cos 5\varphi' d\varphi d\varphi', \\ D &= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R \cos 2\varphi \sin 5\varphi' d\varphi d\varphi'. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Pour calculer ces quatre quantités, on divisera l'intervalle compris entre les limites $\varphi=0$ et $\varphi=2\pi$, ou la circonférence entière, en un nombre de parties assez grand pour que les quantités contenues sous le signe intégral ne varient pas trop rapidement, et qu'elles ne passent pas trop fréquemment d'une valeur positive à une valeur négative, ce qui rendrait les quadratures inexactes; et ce nombre, cependant, sera assez restreint pour que les calculs ne deviennent pas trop pénibles. On a reconnu par quelques essais que, dans le cas qui nous occupe, on satisferait à ces deux conditions et l'on obtiendrait un degré d'exactitude suffisant, en supposant par rapport à l'intégration relative à φ la circonférence divisée en trente-deux parties, et en seize seulement par rapport à l'intégration relative à φ'.

On fera donc successivement

$\varphi=0, \varphi=11°15', \varphi=22°30', \varphi=33°45', \varphi=45°$, etc.,
$\varphi'=0, \varphi'=22°30', \varphi'=45°, \varphi'=67°30', \varphi'=90°$, etc.,

et l'on calculera les valeurs de la fonction R correspondantes à ces diverses valeurs de φ et de φ' prises deux à deux. On aura ainsi $33 \times 17 = 561$, quantités fondamentales à former; nous désignerons, comme dans le n° 25, par $R_{0,0}$, $R_{1,0}$, $R_{2,0}$, etc., $R_{0,1}$, $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, etc., ces quantités, en supposant ensuite, pour abréger,

$$\alpha = 2(11°15') = 22°30', \; \alpha' = 5(22°30') = 112°30',$$

et en faisant

$$\left.\begin{array}{l} P'_0 = \frac{1}{2}R_{0,0}\cos 0 + R_{1,0}\cos\alpha + R_{2,0}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{32,0}\cos 32\alpha, \\ P'_1 = \frac{1}{2}R_{0,1}\cos 0 + R_{1,1}\cos\alpha + R_{2,1}\cos 2\alpha \ldots + \frac{1}{2}R_{32,1}\cos 32\alpha, \\ \text{etc.}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

on aura, pour déterminer la première des intégrales (1),

$$A = \frac{1}{32.16}\left(\tfrac{1}{2}P'_0\cos 0 + P'_1\cos\alpha' + P'_2\cos 2\alpha' \ldots . + \tfrac{1}{2}P'_{16}\cos 16\alpha'\right),$$

et les intégrales B, C, D se calculeront par des formules semblables.

Il suffira donc de remplacer $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, etc., $\cos\alpha'$, $\cos 2\alpha'$, etc., par leurs valeurs dans les expressions précédentes, pour en déduire très aisément les quantités A, B, C, D, du moment que les valeurs numériques des fonctions $R_{0,0}$, $R_{1,0}$, etc., seront déterminées.

110. En ne considérant que l'action de m' sur m, on a

$$R = \frac{m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}.$$

La première partie de cette expression est celle qui a le plus d'influence sur les grandes inégalités de

Jupiter et de Saturne, et dans les chapitres XVII et XVIII, où nous les avons calculées, nous n'avons pas eu égard aux termes dépendans de l'angle $5n't-2nt$, qui peuvent résulter de la seconde partie de la fonction précédente, il faudra donc également les négliger ici, puisque nous avons l'intention de comparer les résultats des chapitres cités à ceux que nous allons obtenir. En nommant donc ρ, pour abréger, la distance mutuelle des deux planètes m et m', l'expression de R deviendra simplement

$$R = \frac{m'}{\rho},$$

et par le n° 25, pour déterminer ρ, on aura

$$\rho = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma \cos(v'-v) - 2rr' \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma \cos(v'+v).$$

Les angles v et v' étant comptés de l'intersection commune des deux orbites, en sorte qu'en nommant Π la longitude du nœud ascendant de l'orbite de m' sur l'orbite de m, on a $v = v - \Pi$, et $v' = v' - \Pi$.

Conformément à ce que nous avons dit n° 25, on commencera par déterminer, au moyen des tables planétaires, les valeurs du rayon vecteur r et de la longitude v de Jupiter correspondante aux valeurs successives de l'anomalie moyenne $\varphi = 0$, $\varphi = 11°15'$, $\varphi = 22°30'$, etc. On déterminera de la même manière les valeurs du rayon vecteur r' et de la longitude v' de Saturne correspondantes aux valeurs de l'anomalie moyenne $\varphi' = 0$, $\varphi' = 22°30'$, $\varphi' = 45°$, etc. De tous les résultats ainsi obtenus on formera un tableau.

On calculera les valeurs de ρ correspondantes aux diverses combinaisons différentes qu'on peut former entre les valeurs de r et de r', de v et de v' comprises dans ce tableau, en les prenant deux à deux; en multipliant ensuite par m' la quantité $\frac{1}{\rho}$ qu'on en déduira, on aura les valeurs correspondantes et successives de R.

Il est clair que ce que nous venons de dire relativement à la fonction R s'appliquerait également à toute autre fonction dérivée d'une manière quelconque de celle-ci. Ainsi, par exemple, par la différentiation de la valeur de R, on aura

$$r\frac{dR}{dr} = -m'.\frac{r^2 - 2rr'\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(v'-v) - rr'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(v'+v)}{\rho'^3},$$

$$\frac{dR}{d\gamma} = -m'.\sin\gamma\frac{rr'\sin v\sin v'}{\rho^3},$$

$$\frac{dR}{d\Pi} = 2m'.\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\frac{rr'\sin(v'+v)}{\rho^3}.$$

On pourra donc calculer les valeurs de ces fonctions correspondantes aux diverses valeurs attribuées aux anomalies φ et φ', et en substituant ces résultats à la place des quantités que nous avons désignées par $R_{0,0}$, $R_{0,1}$, etc., dans les formules (2), on obtiendra, par des procédés semblables à ceux indiqués plus haut, les valeurs numériques des divers coefficiens du développement en série des trois fonctions précédentes.

Enfin, on déterminera comme à l'ordinaire les termes correspondans de la fonction $r'\frac{dR'}{dr'}$ au moyen

de l'équation générale

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr} + r'\frac{d\mathrm{R}}{dr'} = -\mathrm{R}.$$

On a d'ailleurs, n° 4,

$$a\frac{d\mathrm{R}}{da} = r\frac{d\mathrm{R}}{dr} \quad \text{et} \quad a'\frac{d\mathrm{R}}{da'} = r'\frac{d\mathrm{R}}{dr'}.$$

111. En effectuant, d'après les tables de M. Bouvard et à l'aide des valeurs rapportées n° 88, la suite des opérations que nous venons d'indiquer, on a trouvé, relativement à l'action réciproque de Jupiter et Saturne, les résultats suivans :

$$a^{\rm v}\mathrm{K} = -0{,}000942079, \qquad a^{\rm v}\mathrm{K}' = 0{,}0004023958,$$
$$a^{\rm iv}a^{\rm v}\frac{d\mathrm{K}}{da^{\rm iv}} = -0{,}00252078, \quad a^{\rm iv}a^{\rm v}\frac{d\mathrm{K}'}{da^{\rm iv}} = 0{,}00262946,$$
$$a^{\rm v2}\frac{d\mathrm{K}}{da^{\rm v}} = 0{,}00346286, \qquad a^{\rm v2}\frac{d\mathrm{K}'}{da^{\rm v}} = -0{,}00303186.$$

Pour comparer ces valeurs à celles que l'on obtiendrait par les méthodes ordinaires d'approximation fondées sur la petitesse des excentricités et de l'inclinaison mutuelle des orbites de $m^{\rm iv}$ et de $m^{\rm v}$, observons que φ et φ' représentant les anomalies moyennes de ces deux planètes, on a

$$n^{\rm iv}t + \varepsilon^{\rm iv} = \varphi + \omega^{\rm iv}, \quad n^{\rm v}t + \varepsilon^{\rm v} = \varphi' + \omega^{\rm v}.$$

En supposant donc, comme dans le n° 38,

$$\mathrm{R} = m^{\rm v}\mathrm{P}\sin(5n^{\rm v}t - 2n^{\rm iv}t + 5\varepsilon^{\rm v} - 2\varepsilon^{\rm iv}) + m^{\rm v}\mathrm{P}'\cos(5n^{\rm v}t - 2n^{\rm iv}t + 5\varepsilon^{\rm v} - 2\varepsilon^{\rm iv}),$$

on aura

$$\mathrm{R} = m^{\rm v}\mathrm{P}\sin(5\varphi^{\rm v} - 2\varphi + 5\omega^{\rm v} - 2\omega^{\rm iv}) + m^{\rm v}\mathrm{P}'\cos(5\varphi^{\rm v} - 2\varphi + 5\omega^{\rm v} - 2\omega^{\rm iv}),$$

ou bien en développant cette expression

$$R = m^{\text{v}}[P\cos(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) - P'\sin(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}})]\sin(5\varphi' - 2\varphi)$$
$$+ m^{\text{v}}[P\sin(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) + P'\cos(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}})]\cos(5\varphi' - 2\varphi).$$

Si l'on compare cette fonction à l'expression $R = m^{\text{v}}K\sin(5\varphi' - 2\varphi) + m^{\text{v}}K'\cos(5\varphi' - 2\varphi)$, que nous avons supposée au développement de R en séries de sinus et de cosinus des anomalies moyennes φ et φ', on aura

$$\left.\begin{aligned} a^{\text{v}}K &= a^{\text{v}}P\cos(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) - a^{\text{v}}P'\sin(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}), \\ a^{\text{v}}K' &= a^{\text{v}}P\sin(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}) + a^{\text{v}}P'\cos(5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}}); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et il est évident qu'on aurait entre les quantités $a^{\text{iv}}\frac{dK}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{iv}}\frac{dK'}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{v}}\frac{dK}{da^{\text{v}}}$, $a^{\text{v}}\frac{dK'}{da^{\text{v}}}$ et $a^{\text{iv}}\frac{dP}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{iv}}\frac{dP'}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{v}}\frac{dP}{da^{\text{v}}}$, $a^{\text{v}}\frac{dP'}{da^{\text{v}}}$, des équations semblables.

Nous avons déterminé, dans le n° 101, les valeurs des coefficiens des termes du développement de R relatifs à l'argument de la grande inégalité, qui dépendent du cube et de la cinquième puissance des excentricités et des inclinaisons, en réunissant ces différentes parties, qui doivent concourir à former les coefficiens que nous désignons ici par $a^{\text{v}}P$ et $a^{\text{v}}P'$, on trouve

$$a^{\text{v}}P = -0{,}0000595577, \quad a^{\text{v}}P' = 0{,}0010199583.$$

On a d'ailleurs, d'après les valeurs rapportées n° 88, $5\varpi^{\text{v}} - 2\varpi^{\text{iv}} = 63°26'28''$. En substituant ces quantités dans les équations (3), on aura

$$a^{\text{v}}K = -0{,}000938956, \quad a^{\text{v}}K' = 0{,}000402768.$$

Si l'on compare ces valeurs des coefficiens $a^{\mathrm{v}}K$ et $a^{\mathrm{v}}K'$ à celles qu'on a obtenues par la méthode des quadratures, on verra qu'elles s'accordent entre elles d'une manière très satisfaisante.

Nous avons trouvé, n° 101,

$$a^{\mathrm{v}2}\frac{dP}{da^{\mathrm{iv}}} = 0{,}00233313, \quad a^{\mathrm{v}2}\frac{dP'}{da^{\mathrm{iv}}} = 0{,}00630361.$$

En multipliant ces valeurs par $\frac{a^{\mathrm{iv}}}{a^{\mathrm{v}}} = \alpha$, et en les substituant à la place de $a^{\mathrm{v}}P$ et de $a^{\mathrm{v}}P'$ dans les équations (3), on en tire

$$a^{\mathrm{iv}}a^{\mathrm{v}}\frac{dK}{da^{\mathrm{iv}}} = -0{,}00250584, \quad a^{\mathrm{iv}}a^{\mathrm{v}}\frac{dK'}{da^{\mathrm{iv}}} = 0{,}00267500;$$

et au moyen des équations de condition

$$a^{\mathrm{iv}}\frac{dK}{da^{\mathrm{iv}}} + a^{\mathrm{v}}\frac{dK}{da^{\mathrm{v}}} = -K,$$

$$a^{\mathrm{iv}}\frac{dK'}{da^{\mathrm{iv}}} + a^{\mathrm{v}}\frac{dK'}{da^{\mathrm{v}}} = -K';$$

on en déduit

$$a^{\mathrm{v}2}\frac{dK}{da^{\mathrm{v}}} = 0{,}00344480, \quad a^{\mathrm{v}2}\frac{dK'}{da^{\mathrm{v}}} = -0{,}00307777.$$

Ces valeurs, comparées à celles qu'on a obtenues par le moyen des quadratures, paraîtront s'accorder suffisamment avec elles, surtout si l'on se rappelle que dans les n°s 101 et 102 nous n'avons, dans les valeurs de $a^{\mathrm{iv}}\frac{dP}{da^{\mathrm{iv}}}$, $a^{\mathrm{iv}}\frac{dP'}{da^{\mathrm{iv}}}$, $a^{\mathrm{v}}\frac{dP}{da^{\mathrm{v}}}$, $a^{\mathrm{v}}\frac{dP'}{da^{\mathrm{v}}}$, considéré que les termes dépendans des cubes des excentricités et des inclinaisons.

Maintenant, si au moyen des équations (3) on exprime les valeurs de $a^{\text{v}}P$, $a^{\text{v}}P'$ en fonction des quantités $a^{\text{v}}K$, $a^{\text{v}}K'$, et de même relativement à $a^{\text{v}2}\frac{dP}{da^{\text{iv}}}$, $a^{\text{v}2}\frac{dP'}{da^{\text{iv}}}$, etc., on trouvera

$$a^{\text{v}}P = -0{,}0000612864,\quad a^{\text{v}}P' = 0{,}0010225843,$$

$$a^{\text{v}2}\frac{dP}{da^{\text{iv}}} = 0{,}00224621,\quad a^{\text{v}2}\frac{dP'}{da^{\text{iv}}} = 0{,}00629075,$$

$$a^{\text{v}2}\frac{dP}{da^{\text{v}}} = -0{,}00116362,\quad a^{\text{v}2}\frac{dP'}{da^{\text{v}}} = -0{,}00445304.$$

La grande inégalité de Jupiter renferme la partie suivante :

$$\frac{6m^{\text{v}}n^{\text{iv}2}\alpha}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} a^{\text{v}}P'\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}) \\ -\,a^{\text{v}}P\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t-5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}) \end{array}\right\}.$$

D'après les valeurs adoptées, n° 88, on trouve

$$\log\frac{6m^{\text{v}}n^{\text{iv}2}\alpha}{(5n^{\text{v}}-2n^{\text{iv}})^2\sin 1''} = 6{,}0253350.$$

En réduisant en nombres la fonction précédente, elle devient ainsi

$$1084'',012\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+3\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$-\;64'',968\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).$$

En ne considérant que cette partie de la grande inégalité, et en la calculant d'après les valeurs de $a^{\text{v}}P$ et de $a^{\text{v}}P'$, n° 101, on trouvera qu'elle est égale à

$$1089'',855\sin(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}})$$
$$-\;55'',204\cos(5n^{\text{v}}t-2n^{\text{iv}}t+5\varepsilon^{\text{v}}-2\varepsilon^{\text{iv}}).$$

Les différences sont dans les limites qu'on peut supposer d'après les quantités négligées dans le calcul, en considérant surtout que les élémens employés dans la construction des tables de M. Bouvard, qui ont servi à déterminer les quantités $a^{\mathrm{v}}\mathrm{P}$, $a^{\mathrm{v}}\mathrm{P}'$ par les quadratures, diffèrent de ceux que nous avons adoptés.

La grande inégalité de Jupiter contient encore la partie

$$-\frac{2m^{\mathrm{v}}n^{\mathrm{iv}}a^2}{5n^{\mathrm{v}}-2n^{\mathrm{iv}}}\left\{\begin{array}{l} a^{\mathrm{v}2}\dfrac{d\mathrm{P}'}{da^{\mathrm{iv}}}\sin(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}) \\ -a^{\mathrm{v}2}\dfrac{d\mathrm{P}}{da^{\mathrm{iv}}}\cos(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}) \end{array}\right\}.$$

En la réduisant en nombres d'après les valeurs précédentes de $a^{\mathrm{v}2}\dfrac{d\mathrm{P}}{da^{\mathrm{iv}}}$, $a^{\mathrm{v}2}\dfrac{d\mathrm{P}'}{da^{\mathrm{iv}}}$, et en observant qu'on a

$$\log\frac{2m^{\mathrm{v}}n^{\mathrm{iv}}a^2}{(5n^{\mathrm{v}}-2n^{\mathrm{iv}})\sin 1''}=3{,}4140311,$$

cette fonction devient

$$\begin{array}{l} -16'',3205\sin(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}) \\ +\ \ 5'',8275\cos(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}). \end{array}$$

Nous avons trouvé par le développement en série, n° 101,

$$\begin{array}{l} -16'',35386\sin(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}) \\ +\ \ 6'',05299\cos(5n^{\mathrm{v}}t-2n^{\mathrm{iv}}t+5\epsilon^{\mathrm{v}}-2\epsilon^{\mathrm{iv}}); \end{array}$$

ce qui diffère peu de la valeur précédente.

La principale partie de la grande inégalité de Saturne est celle-ci :

$$\frac{15m^{\text{IV}}n^{\text{V}2}}{(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^2}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{V}}\text{P}'\sin(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}) \\ -a^{\text{V}}\text{P}\ \cos(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}). \end{array}\right\}$$

Par les valeurs rapportées n° 88, on a

$$\log\frac{15m^{\text{IV}}n^{\text{V}2}}{(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})^2\sin 1''}=6{,}4193187.$$

En réduisant en nombres la fonction précédente au moyen des valeurs de $a^{\text{V}}\text{P}$ et $a^{\text{V}}\text{P}'$ données plus haut, on trouvera qu'il en résulte dans le mouvement de Saturne les inégalités suivantes :

$$-2685'',4543\sin(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}),$$
$$+\ 160'',9470\cos(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}).$$

En employant les valeurs de $a^{\text{V}}\text{P}$ et $a^{\text{V}}\text{P}'$, calculées n° 101, on aurait trouvé

$$-2678'',5574\sin(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}})$$
$$+\ 156'',4071\cos(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}),$$

quantités qui diffèrent peu des précédentes.

Enfin, la grande inégalité de Saturne contient encore la partie suivante :

$$-\frac{2m^{\text{IV}}n^{\text{V}}}{5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}}}\left\{\begin{array}{l} a^{\text{V}2}\dfrac{d\text{P}'}{da^{\text{V}}}\sin(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}) \\ -a^{\text{V}2}\dfrac{d\text{P}}{da^{\text{V}}}\cos(5n^{\text{V}}t-2n^{\text{IV}}t+5\varepsilon^{\text{V}}-2\varepsilon^{\text{IV}}) \end{array}\right\}.$$

On a

$$\log\frac{2m^{\text{IV}}n^{\text{V}}}{(5n^{\text{V}}-2n^{\text{IV}})\sin 1''}=4{,}0684515.$$

En réduisant en nombres la fonction précédente,

d'après les valeurs de $a^{v*}\frac{dP}{da^v}$ et $a^{v*}\frac{dP'}{da^v}$ calculées par les quadratures, on aura

$$+52'',1524\sin(5n^vt-2n^{iv}t+3\varepsilon^v-2\varepsilon^{iv})$$
$$-13'',6226\cos(5n^vt-2n^{iv}t+5\varepsilon^v-2\varepsilon^{iv}).$$

Nous avons trouvé pour la valeur de cette même inégalité

$$+49'',39049\sin(5n^vt-2n^{iv}t+5\varepsilon^v-2\varepsilon^{iv})$$
$$-13'',49613\cos(5n^vt-2n^{iv}t+5\varepsilon^v-2\varepsilon^{iv}),$$

qui diffère peu de la précédente.

Pour donner un second exemple de l'emploi de la méthode des quadratures au développement de la fonction perturbatrice R, on a calculé de cette manière, et relativement à l'action de Saturne sur Jupiter, le premier terme de ce développement, c'est-à-dire celui qui est indépendant du temps; et en nommant F ce terme, on a trouvé

$$a^vF=m^v1,091097,\quad a^{iv}a^v\frac{dF}{da^{iv}}=m^v0,2238874.$$

En calculant le même terme d'après l'expression donnée n° 18, et en employant les élémens qui ont servi à déterminer les valeurs précédentes, c'est-à-dire les élémens des tables de Bouvard, on a trouvé

$$a^vF=m^v1,091062,\quad a^{iv}a^v\frac{dF}{da^{iv}}=m^v0,2238867.$$

Ces valeurs, comme on voit, sont presque identiques.

L'accord des résultats obtenus par des méthodes si différentes, dans l'une des parties les plus importantes de la théorie des inégalités planétaires, montre

que la méthode des développemens en séries ordonnées par rapport aux puissances ascendantes des excentricités et des inclinaisons, lorsqu'on a soin de porter assez loin les approximations pour ne négliger aucune inégalité sensible, suffit aux besoins actuels de l'Astronomie.

112. La méthode des quadratures a pourtant son utilité : c'est la seule qu'on puisse employer dans le calcul des perturbations des comètes et des petites planètes; et comme on vient de le voir dans la théorie des planètes principales elle peut encore servir à d'importantes vérifications. Il ne sera donc pas inutile de donner ici les formules qui nous semblent les plus simples pour l'application de cette méthode à la détermination des perturbations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude. Ces formules pourront d'ailleurs être employées en d'autres occasions.

Pour cela, reprenons les trois équations du mouvement troublé, n° 87, livre II :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{dR}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{dR}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{dR}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Si l'on prend pour plan des xy, celui de l'orbite primitive de m, ce qui permet de négliger les quantités $z\frac{dR}{dx}$, $z\frac{dR}{dy}$, qui sont du second ordre, puisque z et R sont du premier; en combinant entre elles les équations précédentes, on trouve aisément

les deux intégrales suivantes :

$$\frac{xdz - zdx}{dt} = \int xdt\,\frac{d\mathrm{R}}{dz},$$
$$\frac{ydz - zdy}{dt} = \int ydt\,\frac{d\mathrm{R}}{dz}.$$

Si l'on multiplie par y la première de ces équations, qu'on en retranche la seconde multipliée par x, en observant que les coordonnées x et y se rapportant ici au mouvement elliptique, on a, n° 20, $\frac{xdy - ydx}{dt} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, on trouvera

$$z = \frac{y\int xdt\,\frac{d\mathrm{R}}{dz} - x\int ydt\,\frac{d\mathrm{R}}{dz}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}. \qquad (b)$$

Cela posé, on a pour déterminer les perturbations du rayon vecteur δr et de la latitude δs de la planète au-dessus de son orbite primitive, les deux équations suivantes, n° 89, livre II,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu r\delta r}{r^3} - 2\int d\mathrm{R} - r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 0, \\ \frac{d^2.r\delta s}{dt^2} + \frac{\mu r\delta s}{r^3} - \frac{d\mathrm{R}}{dz} = 0. \end{array}\right\} (c)$$

Ces deux équations sont de même forme, et s'intégreront par conséquent de la même manière. En effet, la première des équations précédentes se transforme dans la seconde, en y changeant δr en δs, et $2\int d\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$ en $\frac{d\mathrm{R}}{dz}$; d'où il suit que, pour avoir δr, il suffira de faire ce changement dans l'expression finie de δs. Or, la seconde des équations (c), n'est autre que la troisième des équations (a), dans

laquelle on a fait $z = r\delta s$; en substituant donc pour z cette valeur dans l'équation (b), on aura la valeur de $r\delta s$, et l'on en conclura immédiatement celle de la fonction $r\delta r$.

Si pour abréger on fait

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = P, \quad \frac{dR}{dz} = P',$$

z devant être supposé égal à zéro, après la différentiation dans la valeur de P'.

En substituant pour x et y leurs valeurs $r\cos v$ et $r\sin v$, relatives au mouvement elliptique, on trouvera

$$\delta r = \frac{\sin v \int r\cos v P dt - \cos v \int r\sin v P dt}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}, \quad (A)$$

$$\delta s = \frac{\sin v \int r\cos v P' dt - \cos v \int r\sin v P' dt}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}. \quad (B)$$

Il nous reste à déterminer les perturbations du mouvement en longitude. On pourrait les déduire de celles du rayon vecteur supposées connues, au moyen de la formule (6), n° 89, livre II, ou plus simplement au moyen de l'équation du mouvement elliptique $r^2 dv = dt\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, qui donne, n° 45, livre II,

$$\delta . r^2 \frac{dv}{dt} = \delta . \sqrt{\mu a(1-e^2)} = \int\left(\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{d\varpi}\right)dt,$$

mais il vaut mieux les calculer par une formule directe. Pour cela, reprenons la formule (a') du n° 83, livre II,

$$\delta v = \int dv\left(\frac{\delta k}{k} - \frac{2\delta r}{r}\right),$$

dans laquelle on suppose $k = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$.

L'équation de l'ellipse donne

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

en prenant le périhélie de m pour l'origine de l'angle v. Au moyen de cette valeur de r et de celle de δr, on trouve aisément

$$\int \frac{\delta r}{r}\,dv = -\frac{\left\{\begin{array}{l}(\sin v+\frac{1}{4}e\sin 2v)\int r\sin v\mathrm{P}dt\\ +(\frac{1}{4}e+\cos v+\frac{1}{4}e\cos 2v)\int r\cos v\mathrm{P}dt\\ -\int r\mathrm{P}dt+\frac{1}{4}e\int dv\int r\sin v\mathrm{P}dt\end{array}\right\}}{ka(1-e^2)}.$$

En observant que l'on a, n° 4, $\frac{d\mathrm{R}}{d\epsilon}+\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}=\frac{d\mathrm{R}}{dv}$, par le n° 45, livre II, on trouve

$$\delta k = \int \frac{d\mathrm{R}}{dv}\,dt.$$

On a d'ailleurs

$$d'\mathrm{R} = \frac{d\mathrm{R}}{dr}\,dr + \frac{d\mathrm{R}}{dv}\,dv,$$

et par les formules du mouvement elliptique

$$\frac{dt}{dv} = \frac{r^2}{k}, \quad \frac{dr}{dv} = \frac{er\sin v}{1+e\cos v}; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{ek\sin v}{a(1-e^2)}.$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$k\delta k = \int r^2 d'\mathrm{R} - \int \frac{ke\sin v dt}{1+e\cos v}\cdot r\frac{d\mathrm{R}}{dr}.$$

Si dans l'expression de δv on substitue cette valeur et celle de $\int \frac{\delta r}{r}\,dv$, on aura

$$\delta v = \int \frac{dv}{k^2} \int r^2 d'R - \frac{e}{ka(1-e^2)} \int dv \int r \sin v dt \,.\, r \frac{dR}{dr}$$
$$+ \frac{\left\{ \begin{array}{l} (2 \sin v + \frac{1}{2} e \sin 2v) \int r \sin v P dt \\ (\frac{1}{2} e + 2 \cos v + \frac{1}{2} e \cos 2v) \int r \cos v P dt \\ -2 \int r P dt + e \int dv \int r \sin v P\, dt \end{array} \right\}}{ka(1-e^2)} \qquad (C)$$

Cette expression se réduit aisément à une forme plus simple; en substituant en effet à la place de P sa valeur dans le dernier terme, et en le combinant ensuite avec les deux premiers, on trouve

$$\delta v = \frac{\left\{ \begin{array}{c} \left(2 \sin v + \frac{1}{2} e \sin 2v\right) \int \frac{\sin v P dt}{1 + e \cos v} \\ + \left(\frac{1}{2} e + e \cos v + \frac{1}{2} e \cos 2v\right) \int \frac{\cos v P dt}{1 + e \cos v} \\ + \frac{1}{2} \int P dt - \frac{1}{2} \int r \left(\frac{dR}{dr}\right) dt \end{array} \right\}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \,.\quad (C)$$

En substituant pour r sa valeur dans les expressions de δr et de δs, on voit qu'elles se trouveront immédiatement ramenées à la même forme que la fonction précédente.

Les trois formules (A), (B), (C) donneront donc sous forme finie les perturbations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, ce qui peut être très utile dans la théorie des petites planètes où ces perturbations ne peuvent être déterminées que par des quadratures, à cause de la grandeur des excentricités de leurs orbites. Les mêmes formules pourraient être employées aussi par la même raison dans la théorie des comètes, mais il est préférable de se

servir alors des formules du livre III. Dans tous les cas, pour calculer par des quadratures les expressions précédentes, on commencera par substituer pour dt la valeur $\frac{r^2 dv}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$, et pour R sa valeur en fonction des rayons vecteurs et des longitudes vraies des planètes troublées et de la planète perturbatrice. En nommant γ l'inclinaison mutuelle des orbites de m et de m', et Π la longitude de leur commune intersection comptée de la même origine que l'angle v, et en faisant $V = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma \cos(v' - v) + \sin^2 \frac{1}{2}\gamma \cos(v' + v - 2\Pi)$, on aura, par le n° 25,

$$R = m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'V}} - \frac{rV}{r'^2} \right\}.$$

De cette expression on conclura par de simples différentiations, celles de $d'R$ et de $r\frac{dR}{dr}$, et par suite les valeurs des quantités que nous avons désignées par P et P' dans les formules précédentes. On pourra, par conséquent, calculer par la méthode des quadratures paraboliques, exposée n° 25, les intégrales

$$\int r^3 \sin v P dv, \ \int r^3 \cos v P dv, \ \int r^3 \sin v P' dv, \ \int r^3 \cos v P' dv,$$

ainsi que les intégrales $\int r^2 P dv$, $\int r^3 \frac{dR}{dr} dv$ que ces formules renferment.

Dans la théorie des planètes principales, la petitesse des excentricités et des inclinaisons mutuelles des orbites permet de développer leurs perturbations en séries convergentes, et c'est sans contredit la mé-

thode la plus simple que l'on puisse employer pour obtenir ces perturbations exprimées par des suites de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, et en former des tables qui peuvent servir pour un temps indéfini. L'emploi des formules précédentes serait alors moins simple que celui des équations différentielles qui déterminent les trois variables δr, δv et δs; et c'est par cette raison que nous n'avons eu besoin que de ces équations dans la théorie des inégalités planétaires. Mais lorsqu'on veut déterminer les coefficiens du développement de la fonction perturbatrice et de ses différences par la méthode des intégrales définies, ainsi que nous l'avons indiqué n° 25, les formules précédentes sont, je crois, les plus commodes que l'on puisse employer, dans ce cas, pour en conclure les valeurs de δr, δv et δs.

En effet, au moyen d'intégrales doubles on pourra toujours, comme on l'a vu n° 25, déterminer les coefficiens du développement en séries de sinus et de cosinus d'angles proportionnels au temps t, des fonctions $\int d'\text{R}$, $\int r\frac{d\text{R}}{dr}dt$, et l'on développerait par conséquent, de la même manière, les fonctions $\int r \sin v \text{P} dt$, $\int r \cos v \text{P} dt$, $\int r \sin v \text{P}' dt$, $\int r \cos v \text{P}' dt$. En substituant ensuite ces valeurs ainsi exprimées dans les formules (A), (B) et (C), et en mettant pour $\sin v$ et $\cos v$ leurs valeurs développées en série des sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne de la planète m, on aura les expressions des perturbations du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude applicables

à un temps indéfini, les plus exactes que la théorie puisse fournir.

Il serait à désirer que quelque calculateur zélé fît l'application des formules précédentes à la détermination des perturbations de toutes les grandes planètes. Il en résulterait le moyen le plus sûr pour vérifier les inégalités déjà calculées, par d'autres méthodes, et découvrir les inégalités sensibles qui auraient pu jusqu'ici échapper aux investigations des géomètres. M. Hansen, astronome attaché à l'observatoire du Séeberg, a déjà essayé sur la théorie de Jupiter et de Saturne un travail semblable; mais le choix malheureux des variables qu'il a cru devoir substituer aux trois coordonnées δr, δv, δs, généralement adoptées par les astronomes, des innovations analytiques dont les avantages ne rachètent pas la bizarrerie, enfin, l'absence complète de clarté et de méthode, rendent ce travail à peu près inutile (*). J'invite donc les jeunes géomètres à reprendre cet objet sous le point de vue que nous leur indiquons: peut-être nous sera-t-il permis d'y revenir dans la suite de cet ouvrage, mais nous allons, pour le moment, porter notre attention sur d'autres points de la théorie du système du monde, la détermination des inégalités planétaires nous ayant déjà entraîné bien au-delà des limites que nous nous étions prescrites.

(*) *Voir* le compte que j'en ai rendu dans la *Connaissance des Tems* pour 1837.

Mouvemens héliocentriques de Jupiter et Saturne.

113. En réunissant les différentes inégalités calculées dans les chapitres VI et VII, on a obtenu les expressions des longitudes vraies, et des rayons vecteurs de Jupiter et de Saturne, les plus exactes que l'état actuel de l'analyse permette d'espérer. Dans les formules suivantes, t représente un nombre quelconque d'années juliennes ou de $365^j \frac{1}{4}$, comptées à partir de minuit le 1er janvier 1800.

Soit, pour cette époque,

$$n^{\text{iv}}t + \epsilon^{\text{iv}} = 81^\circ 52' 19'',3 + t\; 30^\circ,349084,$$
$$n^{\text{v}}t + \epsilon^{\text{v}} = 123.\; 5.29,4 + t\; 12^\circ,221148,$$
$$n^{\text{vi}}t + \epsilon^{\text{vi}} = 173.30.16,4 + t\; 4^\circ,284890,$$

ces trois quantités représentant les longitudes moyennes de Jupiter, Saturne et Uranus, comptées de l'équinoxe fixe de 1800. Dans ces expressions, nous avons substitué à la place des moyens mouvemens n^{iv}, n^{v} et n^{vi}, rapportées n° 88, leurs valeurs résultantes des corrections indiquées par les équations de condition qui ont servi à former les nouvelles tables de M. Bouvard.

Soit encore

$$\varpi^{\text{iv}} = 11^\circ\; 7' 36'' + t\; 6'',683122 - t^2\, 0,000235,$$
$$\varpi^{\text{v}} = 89.\; 8.20 + t\, 19'',055044 + t^2\, 0,000162,$$
$$\alpha^{\text{iv}} = 98.25.45 + t\, 36'',582830,$$
$$\alpha^{\text{v}} = 111.56.\; 7 + t\, 31'',32131.$$

Les termes constans dans ces expressions sont les

longitudes des périhélies, et des nœuds de Jupiter et Saturne, comptées du même équinoxe que les longitudes moyennes $n^{\text{IV}}t + \varepsilon^{\text{IV}}$, $n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}}$, et relatives à la même époque; les termes proportionnels au temps t sont les variations séculaires de ces longitudes déterminées n.os 91 et 101.

Supposons maintenant que, pour abréger, on représente respectivement par p et p' les argumens des deux grandes inégalités de Jupiter et Saturne; en sorte qu'on ait

$$p = 5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + 3^{\circ}\,40'\,59'' - t\;76'',2770 - t^2\;0'',0012620,$$
$$p' = 5n^{\text{V}}t - 2n^{\text{IV}}t + 5\varepsilon^{\text{V}} - 2\varepsilon^{\text{IV}} + 3^{\circ}\,38'\,32'' - t\;76'',598 - t^2\;0'',001164,$$

et soit ensuite

$$\text{A} = (1187'',247 - t\,0'',04845 + t^2\,0,00000226)\sin p - 12'',21854\sin 2p,$$

$$\text{A}' = -(2906'',661 - t\,0'',11411 + t^2\,0,00000052)\sin p' + 29'',76156\sin 2p' + 30'',894\sin(3n^{\text{VI}}t - n^{\text{V}}t + 3\varepsilon^{\text{VI}} - \varepsilon^{\text{V}} - 87^{\circ}28'7''),$$

la quantité A représentant la grande inégalité de Jupiter, et la quantité A′ celle de Saturne augmentée de l'inégalité à longue période dépendante de l'argument $3n^{\text{VI}}t - n^{\text{V}}t$, et relative à l'action d'Uranus sur Saturne.

Ces diverses inégalités doivent, d'après les n.os 101 et 102, être ajoutées aux moyens mouvemens de Jupiter et Saturne, en faisant donc, pour abréger,

$$q = n^{\text{IV}}t + \varepsilon^{\text{IV}} + \text{A},\quad q' = n^{\text{V}}t + \varepsilon^{\text{V}} + \text{A}',\quad q'' = n^{\text{VI}}t + \varepsilon^{\text{VI}}.$$

On a vu, n° 65, que dans tous les argumens de Jupiter et de Saturne dans lesquels le coefficient du temps n'est pas $5n^{\text{v}} - 2n^{\text{iv}}$, ou qui n'en diffèrent pas de n^{iv} pour Jupiter et de n^{v} pour Saturne, il faut augmenter les longitudes moyennes $n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}}$, $n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{v}}$ de leurs grandes inégalités dépendantes de l'angle $5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t$. Il faudra donc substituer dans toutes les inégalités de Jupiter q et q' à la place de $n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}}$ et de $n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{v}}$, excepté dans la grande inégalité et dans la suivante :

$$161'',149 \sin (3n^{\text{iv}}t - 5n^{\text{v}}t + 3\varepsilon^{\text{iv}} - 5\varepsilon^{\text{v}} + 58^\circ 11' 34'').$$

Si l'on veut, pour plus de régularité, employer également q et q' à la place de $n^{\text{iv}}t + \varepsilon^{\text{iv}}$ et de $n^{\text{v}}t + \varepsilon^{\text{v}}$ dans cette dernière inégalité, on lui donnera cette forme :

$$161'',149 \sin (3q - 5q' - 3A + 5A' + 58^\circ 11' 34''),$$

A et A' étant, par ce qui précède, les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. En développant la quantité précédente, on aura

$$161'',149 \sin (3q - 5q' - 58^\circ 11' 34'')$$
$$- (3A - 5A')\, 161'',149 \cos (3q^{\text{iv}} - 5q^{\text{v}} + 58^\circ 11' 34'').$$

En n'ayant égard dans les valeurs de A et A' qu'aux deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, on a à très peu près

$$3A - 5A' = 18095'',046 \sin (5n^{\text{v}}t - 2n^{\text{iv}}t + 5\varepsilon^{\text{v}} - 2\varepsilon^{\text{iv}} + 3^\circ 39' 45'');$$

d'où l'on conclura

$$-(3A-5A')\,161'',149\cos(3q-5q'+58^\circ 11'34'')$$

$$=-7'',0686\begin{cases}\sin(3q-5q'+5n^{v}t-2n^{iv}t+61^\circ 51'19'')\\ -\sin(3q-5q'-5n^{v}t+2n^{iv}t+54^\circ 31'49'')\end{cases}$$

On peut, sans erreur sensible, substituer dans ces deux dernières inégalités q et q' à la place de $n^{iv}t+\varepsilon^{iv}$ et de $n^{v}t+\varepsilon^{v}$; la première se confond alors avec le premier terme de l'équation du centre de Jupiter, la seconde devient égale à

$$7'',0686\sin(5q-10q'+54^\circ 30'35'').$$

En la réunissant à la suivante

$$-3'',7808\sin(5q-10q'+54^\circ 30'35''),$$

on aura celle-ci

$$3'',2870\sin(5q-10q'+54^\circ 30'35'').$$

On pourra ainsi substituer q et q' au lieu de $n^{iv}t+\varepsilon^{iv}$ et de $n^{v}t+\varepsilon^{v}$ dans toutes les inégalités de Jupiter, abstraction faite de la grande inégalité.

Il faut de même, d'après ce qu'on a vu, n° 65, changer $n^{iv}t+\varepsilon^{iv}$ en q et $n^{v}t+\varepsilon^{v}$ en q' dans toutes les inégalités de Saturne, excepté dans la grande inégalité et dans la suivante :

$$-644'',953\sin(2n^{iv}t-4n^{v}t+59^\circ 34'4'').$$

On peut donner à cette inégalité cette forme :

$$-644'',953\sin(2q-4q'-2A+4A'+59^\circ 34'4'').$$

En développant cette fonction, on a

$$-644'',953 \sin(2q - 4q' + 59^\circ 54' 4'')$$
$$+(2A - 4A')\,644'',953 \cos(2q - 4q' + 59^\circ 34' 4'').$$

En substituant pour A et A′ les parties de leurs valeurs relatives à l'argument $5n^{v}t - 2n^{iv}t$, on trouvera, à très peu près,

$$(2A - 4A')\,644'',953 \cos(2q - 4q' + 59^\circ 34' 4''),$$
$$= 21'',890 \left\{ \begin{array}{l} \sin(2q - 4q' + 5n^{v}t - 2n^{iv}t + 5\varepsilon^{v} - 2\varepsilon^{iv} \\ \qquad + 63^\circ 12' 36'') \\ -\sin(2q - 4q' - 5n^{v}t + 2n^{iv}t - 5\varepsilon^{v} + 2\varepsilon^{iv} \\ \qquad + 55^\circ 55' 32''). \end{array} \right\}$$

On peut, dans ces deux dernières inégalités, substituer q et q' à la place de $n^{iv}t + \varepsilon^{iv}$ et de $n^{v}t + \varepsilon^{v}$; la première se confond alors avec l'équation du centre de Saturne, et la seconde devient

$$-21'',890 \sin(4q - 9q' + 55^\circ 55' 32'').$$

En réunissant cette inégalité à la suivante, trouvée n° 102,

$$8'',766 \sin(4q - 9q' + 55^\circ 55' 32''),$$

on aura celle-ci

$$-13'',124 \sin(4q - 9q' + 55^\circ 55' 32'').$$

On pourra donc maintenant substituer q et q' à la place de $n^{iv}t + \varepsilon^{iv}$ et de $n^{v}t + \varepsilon^{v}$ dans toutes les inégalités du mouvement en longitude et en latitude de Jupiter et de Saturne, à l'exception des grandes inégalités de ces deux planètes.

Si l'on suppose la précession annuelle des équinoxes

de $50'',22350$, la longitude vraie v^{IV} de Jupiter dans son orbite, comptée de l'équinoxe moyen et rapportée au minuit qui sépare le 31 décembre 1799 du 1[er] janvier 1800, sera donnée par la formule suivante :

$$v^{\mathrm{IV}} = q + t\,50'',22350 + \left\{\begin{array}{l} \;(19862'',80 + t\;0'',63242)\sin\;(q - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\;(597'',55 + t\;0'',03807)\sin 2(q - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\;(24'',92 + t\;0'',00240)\sin 3(q - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\;(1'',19 + t\;0'',00016)\sin 4(q - \varpi^{\mathrm{IV}}) \\ +\;(0'',06 \sin 5(q - \varpi^{\mathrm{IV}}) \end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} -\;84'',63 \sin\,(q - q' - 1^{\circ}\,6') \\ +\;209'',10 \sin\,(2q - 2q' - 1^{\circ}\,10') \\ +\;16'',32 \sin 3(q - q') \\ +\;3'',75 \sin 4(q - q') \\ +\;1'',69 \sin\,(5q - 5q' + 12^{\circ}\,11') \\ +\;0'',41 \sin 6(q - q') \\ +\;0'',16 \sin 7(q - q') \end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \;(132'',39 + t\;0'',067)\sin(q - 2q' - 12^{\circ}26' + t\,15'',7) \\ +\;17'',29 \sin\,(2q - 4q' + 57^{\circ}\,12') \\ +\;3'',29 \sin\,(5q - 10q' + 54^{\circ}\,30') \end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \;(83'',45 - t\;0'',005)\sin(2q - 3q' - 60^{\circ}54' + t\;27'',1) \\ -\;1'',58 \sin\,(4q - 6q' + 54^{\circ}\,26') \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} +(161'',15 + t\,0'',0014)\sin(3q - 5q' + 58^{\circ}\,11' + t\;45'',32) \\ -\;15'',28 \sin\,(3q - 4q' - 61^{\circ}\,46') \\ +\;12'',27 \sin\,(3q - 2q' - 9^{\circ}\,35') \\ +\;9'',50 \sin\,(3q' - q + 69^{\circ}\,45') \\ +\;11'',05 \sin\,(q' + 43^{\circ}56') - 5'',44 \sin(2q' + 43^{\circ}55') \\ +\;11'',12 \sin\,(4q - 5q' + 59^{\circ}\,23') \\ -\;5'',13 \sin\,(2q - q' - 17^{\circ}\,5') \\ +\;1'',21 \sin\,(4q - 3q' - 3^{\circ}\,28') \\ -\;0'',88 \sin\,(5q - 6q' - 65^{\circ}\,7') \\ +\;0'',74 \sin\,(q' + q + 67^{\circ}\,4') \end{array}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} -\;1'',14 \sin\;(q - q'') \\ +\;0'',59 \sin 2(q - q'') \\ +\;0'',05 \sin 3(q - q''). \end{array}\right\}$$

On a réuni sous une même parenthèse les inégalités qui peuvent être comprises dans une même table. La réduction à l'écliptique se fera par les mé-

thodes ordinaires ; elle est égale à

$$-27'',15 \sin (2v^{\text{iv}} - 2\alpha^{\text{iv}}).$$

Le rayon vecteur r^{iv} de Jupiter sera déterminé par la formule suivante :

$$r^{\text{iv}} = 5{,}208760 + t\ 0{,}0000384$$
$$+ \begin{cases} -(0{,}250358 + t\ 0{,}0007964) \cos\ (q - \varpi^{\text{iv}}) \\ -(0{,}006022 + t\ 0{,}0000384) \cos 2(q - \varpi^{\text{iv}}) \\ -(0{,}000218 + t\ 0{,}0000021) \cos 3(q - \varpi^{\text{iv}}) \\ -(0{,}000093 + t\ 0{,}000000) \cos 4(q - \varpi^{\text{iv}}) \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 0{,}000647 \cos\ (q - q') \\ -0{,}002771 \cos 2(q - q') \\ -0{,}000289 \cos 3(q - q') \end{cases}$$
$$- 0{,}000272 \cos (q - 2q' - 35^\circ\ 49')$$
$$- 0{,}000919 \cos (2q - 3q' - 67^\circ\ 55')$$
$$- 0{,}002020 \cos (3q - 5q' + 58^\circ\ 7')$$
$$+ 0{,}000238 \cos (3q - 4q' - 61^\circ\ 12')$$
$$- 0{,}000129 \cos (3q - 2q' - 12^\circ\ 4')$$
$$- 0{,}000065 \cos (q' + 29^\circ\ 13') + 0{,}000074 \cos (2q' + 11^\circ\ 1')$$
$$- 0{,}000292 \cos (5q' - 2q - 15^\circ\ 33')$$
$$+ 0{,}000091 \cos (5q' - 4q + 14^\circ\ 23').$$

Enfin, pour déterminer la latitude de Jupiter au-dessus de l'écliptique vraie, on aura

$$\delta s^{\text{iv}} = (1^\circ\ 19'\ 2'',7 - t\ 0'',22606) \sin (v^{\text{iv}} - \alpha^{\text{iv}})$$
$$+ 0'',6351 \sin (q - 2q' - 53^\circ\ 54')$$
$$+ 1'',0711 \sin (2q - 3q' - 53^\circ\ 54')$$
$$+ 11'',5986 \sin (3q - 5q' + 50^\circ\ 26')$$
$$- 0'',9978 \sin (q' + 53^\circ\ 54').$$

En rassemblant de même les différentes inégalités déterminées chapitre VIII, on aura pour la longitude héliocentrique de Saturne la formule suivante :

$$
\begin{aligned}
v^{\text{v}} = q' &+ t\,50'',22350 \\
&+ \left\{\begin{array}{l}
\ (23154'',40 - t\,1'',2783) \sin\ (q' - \varpi^{\text{v}}) \\
+\ (811'',96 - t\,0'',0901) \sin 2(q' - \varpi^{\text{v}}) \\
+\ (39'',48 - t\,0'',0066) \sin 3(q' - \varpi^{\text{v}}) \\
+\ (2'',19 - t\,0'',0005) \sin 4(q' - \varpi^{\text{v}})
\end{array}\right\} \\
&+ \left\{\begin{array}{l}
\ 29'',40 \sin\ (q - q' + 77^\circ\,45') \\
-\ 31'',89 \sin 2(q - q') \\
-\ 6'',65 \sin 3(q - q') \\
-\ 1'',99 \sin 4(q - q') \\
-\ 0'',71 \sin 5(q - q') \\
-\ 0'',27 \sin 6(q - q') \\
-\ 0'',12 \sin 7(q - q')
\end{array}\right\} \\
&- (424'',83 + t\,0'',0227) \sin\ (q - 2q' - 13^\circ\,57' + t\,13'',89) \\
&- (652'',59 - t\,0,03817) \sin\ (2q - 4q' + 59^\circ 34' - t\,60'',76) \\
&- (48'',89 - t\,0,000366) \sin\ (3q' - q + 78^\circ\,4' - t\,34'',55) \\
&- 24'',37 \sin\ (2q - 3q' + 20^\circ\,45') \\
&+ 11'',44 \sin\ (q + 84^\circ\,36') \\
&- 13''12, \sin\ (4q - 9q' + 55^\circ\,55') \\
&+ 4'',966 \sin\ (3q - 4q' - 61^\circ\,45') \\
&+ 3'',06 \sin\ (2q - q' + 30^\circ\,45') \\
&+ 2'',97 \sin\ (3q - 5q' + 59^\circ\,12') \\
&+ 1'',44 \sin\ (4q - 5q' - 61^\circ\,57') \\
&+ 0'',53 \sin\ (5q - 6q' - 61^\circ\,53') \\
&+ \left\{\begin{array}{l}
-\ 10'',07 \sin\ (q' - q'') \\
+\ 15'',73 \sin 2(q' - q'') \\
+\ 2'',06 \sin\ (3q' - 3q'' - 69^\circ\,6') \\
+\ 0'',34 \sin 4(q' - q'')
\end{array}\right\} \\
&+ 10'',71 \sin\ (q' - 2q'' + 73^\circ\,11') \\
&+ 29'',63 \sin\ (2q' - 3q'' + 24^\circ\,31') \\
&+ 1'',65 \sin\ (3q' - 2q'' - 89^\circ\,8') \\
&+ 1'',48 \sin\ (q'' - 42^\circ\,36').
\end{aligned}
$$

La réduction à l'écliptique est égale à

$$- 97'',83 \sin (2v^{\text{v}} - 2\alpha^{\text{v}}).$$

Le rayon vecteur de Saturne sera donné par la formule suivante :

$$r^{v} = 9{,}557777 - t\,0{,}0000167$$

$$+\left\{\begin{array}{l} -(0{,}534988 + t\,0{,}00002966)\cos\ (q' - \varpi^{v}) \\ -(0{,}015005 + t\,0{,}00000167)\cos 2(q' - \varpi^{v}) \\ -(0{,}000634 + t\,0{,}00000011)\cos 3(q' - \varpi^{v}) \\ -\ 0{,}000032\cos 4(q' - \varpi^{v}) \\ -\ 0{,}000339\cos\ (q' - 10^{\circ}\,21') \end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \quad 0{,}00763\ \cos\ (q' - q - 4^{\circ}\,15') \\ +\ 0{,}00140\ \cos 2(q' - q) \\ +\ 0{,}00034\ \cos 3(q' - q) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} +\ 0{,}00542\ \cos\,(q - 2q' - 11^{\circ}\,10') \\ +\,(0{,}01479 - t\,0{,}00000734)\cos\,(2q - 4q' + 59^{\circ}\,28' - t\,63'',24) \\ -\ 0{,}00119\cos\,(3q' - q - 90^{\circ}\,12') \\ -\ 0{,}00155\cos\,(3q' - 2q + 38^{\circ}\,55') \\ -\ 0{,}00021\cos\,(3q - 4q' - 61^{\circ}\,23') \\ +\ 0{,}00095\cos\,(5q' - 2q + 32^{\circ}\,32') \\ +\ 0{,}00016\cos\ (q' - q'') \\ -\ 0{,}00043\cos 2(q' - q'') \\ -\ 0{,}00066\cos\,(2q' - 3q'' + 23^{\circ}\,44'). \end{array}$$

Enfin, la latitude de Saturne au-dessus de l'écliptique vraie, sera donnée par la formule suivante :

$$s^{v} = (2^{\circ}\,29'\,50'',3 - t\,0'',155137)\sin(v^{v} - \alpha^{v})$$

$$+\left\{\begin{array}{l} \quad 3'',18\ \sin\,(2q' - q + 53^{\circ}\,54') \\ +\ 9'',31\ \sin\,(4q' - 2q - 60^{\circ}\,24') \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} +\ 0'',53\ \sin\,(2q - 3q' - 53^{\circ}\,54') \\ +\ 1'',81\ \sin\,(q + 53^{\circ}\,54') \\ -\ 0'',67\ \sin\,(2q - 3q'' - 54^{\circ}\,8'). \end{array}$$

Les expressions précédentes diffèrent peu des formules employées par M. Bouvard dans la construction de ses tables de Jupiter et de Saturne, formules qui représentent avec beaucoup de précision les observations de Bradley et Maskeline, qui ont servi à corriger les élémens du mouvement elliptique. La plus grande erreur ne s'élève qu'à 12″ pour Jupiter,

et les écarts entre les résultats du calcul et de l'observation sont beaucoup moindres relativement à Saturne, tandis qu'il y a 50 ans les erreurs des meilleures tables de cette dernière planète s'élevaient quelquefois à 22′. Laplace s'est assuré aussi que ces formules, qui représentent, avec toute l'exactitude qu'on peut désirer, les observations modernes, représentent également bien les observations de Flamsteed, celles des Arabes et les observations anciennes rapportées par Ptolémée. Nous ne pouvions donc pas espérer de trouver dans la théorie de Jupiter et Saturne aucune inégalité considérable qui n'eût point encore été calculée. Le nouvel examen que je viens de faire des perturbations de ces deux planètes, ne m'a indiqué de rectification importante à faire aux valeurs calculées par Laplace, que dans la partie du coefficient de la grande inégalité qui dépend du carré des forces perturbatrices. Il serait à désirer cependant qu'on comparât de nouveau les formules ainsi rectifiées aux 104 oppositions de Jupiter et Saturne qui servent de base aux nouvelles tables de M. Bouvard; les corrections qui en résulteraient pour les élémens des orbites elliptiques, seraient sans doute insensibles: mais cette comparaison pourrait indiquer, comme on l'a dit nº 87, pour la masse de Jupiter employée par Laplace, et qui est à peu près celle qu'avait donnée Newton, une correction qui rapprocherait sa valeur de celle qui résulte du calcul des inégalités des petites planètes et des élongations des satellites observées par M. Airy.

CHAPITRE XXII.

Formation des Tables astronomiques par la comparaison des observations et de la théorie. Détermination du plan invariable. Conclusion de la théorie des inégalités planétaires.

114. Nous allons nous occuper ici de la construction des tables planétaires, et montrer comment, par le concours des observations et des formules de la théorie, on peut s'élever, de siècle en siècle, à la connaissance plus exacte de tous les mouvemens célestes. Nous entrerons, à cet égard, dans quelques détails qui paraîtront peut-être superflus aux astronomes qui s'occupent spécialement de cet objet, mais qui nous semblent nécessaires pour montrer aux jeunes géomètres qui étudient la théorie du système du monde, et auxquels cet ouvrage est surtout destiné, combien la détermination théorique des inégalités séculaires et périodiques des mouvemens planétaires, a d'influence sur les valeurs des élémens d'où dépendent les tables astronomiques, et combien il importe par conséquent de la perfectionner de plus en plus, pour donner à ces tables toute la précision que les observations comportent.

Dans l'état actuel de l'Astronomie, on doit re-

garder les masses des planètes et les élémens de leurs orbites comme à peu près connus, et ils n'ont besoin que de légères corrections qu'on déterminera à mesure que les bonnes observations se multiplieront. Les inégalités séculaires sont propres surtout à faire connaître les valeurs exactes des masses, et les coefficiens indéterminés que nous avons laissés subsister dans nos formules, et qui représentent les corrections dont les masses que nous avons adoptées sont encore susceptibles, seraient aisément déterminées, si l'on avait les valeurs précises de ces inégalités pour des époques fixées. Malheureusement les observations anciennes sont trop incorrectes, et les modernes trop rapprochées, pour qu'on puisse déterminer de cette manière les masses planétaires; et en attendant que les variations séculaires se soient par la suite des temps suffisamment développées, on est obligé d'employer, à leur défaut, les inégalités périodiques résultant d'un grand nombre d'observations, et de déterminer les corrections des masses comme celles des autres élémens du mouvement elliptique.

Pour cela, on réunira un grand nombre d'observations faites avec de bons instrumens, par des observateurs habiles, et embrassant le plus grand intervalle qu'il se pourra. Chaque observation donnera la longitude et la latitude géocentriques de la planète pour une époque connue. On convertira d'abord cette longitude et cette latitude, corrigées de l'aberration et de la nutation, en longitude et en latitude héliocentrique, c'est-à-dire vues du centre

du Soleil, par les formules connues, et l'on effectuera les mêmes opérations sur toutes les observations dont on veut faire usage. Ensuite, au moyen des tables provisoires qui résultent des formules précédentes, disposées comme on l'a vu n° 107, on calculera les longitudes et les latitudes correspondantes aux mêmes époques. Si ces tables étaient exactes et les observations d'une rigoureuse précision, les valeurs résultantes de l'observation et du calcul devraient être identiquement les mêmes; les différences seront donc l'erreur des tables, puisque l'on suppose que l'on peut compter sur les observations. En faisant, par conséquent, varier d'une très petite quantité chacun des élémens de l'orbite elliptique, ainsi que les valeurs des masses perturbatrices, dans l'expression de la longitude et de la latitude de la planète, et en égalant les variations qui en résulteront aux différences entre les longitudes et les latitudes observées et calculées par les formules de la théorie, on aura autant d'équations de condition entre les corrections qu'on a fait subir aux élémens elliptiques de la planète et aux masses perturbatrices. Comme ces équations seront toujours en beaucoup plus grand nombre que les inconnues qu'elles renferment, on les combinera entre elles par la méthode des moindres carrés, de manière à réduire leur nombre à celui des inconnues, et en les résolvant par les méthodes ordinaires d'élimination, on en déduira les valeurs de ces quantités. On aura ainsi le moyen le plus exact que l'on puisse employer, dans l'état de perfectionnement qu'a atteint l'Astronomie théorique et pratique, pour

arriver, par des corrections successives, à la détermination exacte des masses et des élémens des orbes des planètes.

Soit donc V' la longitude héliocentrique de m déduite de l'observation, et V cette même longitude calculée par le moyen des formules précédentes, ou des tables provisoires qu'on en aura déduites, et soit δV la variation de V résultant des corrections de chacun des élémens qui entrent dans son expression, la comparaison des longitudes observées et calculées donnera $V = V' + \delta V$, et par conséquent

$$\delta V = V' - V.$$

Si l'on désigne par P', P'', etc., les perturbations qu'éprouve la planète m par l'action des planètes m', m'', etc., en vertu des formules du mouvement troublé, on aura

$$V = nt + \varepsilon + 2e \sin(nt + \varepsilon - \omega) + m'P' + m''P'' + \text{etc.},$$

en n'ayant égard, pour plus de simplicité, qu'au premier terme de l'équation du centre, parce que les corrections qui résulteraient de la considération des autres termes, seraient absolument insensibles. De même, on ne conservera dans P', P'', etc., que les inégalités affectées des coefficiens les plus considérables.

Si l'on différentie par rapport à la caractéristique δ cette expression, en faisant varier les constantes du mouvement elliptique et les masses perturbatrices m', m'', etc., que pour abréger on fasse $p = nt + \varepsilon - \omega$, on aura

$$\delta V = (t\,\delta n + \delta\varepsilon)(1 + 2e \cos p) + 2\delta e \sin p - 2e\,\delta\omega \cos p + P'\delta m' + P''\delta m'' + \text{etc.}$$

et par conséquent, entre les variations $t\delta n$, $\delta\varepsilon$, etc., on aura l'équation de condition suivante :

$$(t\,\delta n+\delta\varepsilon)\,(1+2e\cos p)+2\delta e\sin p-2e\delta\varpi\cos p+\mathrm{P}'\delta m'+\mathrm{P}''\delta m''+\text{etc.}=\mathrm{V}'-\mathrm{V}.$$

Chaque observation donnera une équation semblable, et la résolution de toutes ces équations combinées par la méthode des moindres carrés, fera connaître les valeurs des corrections indéterminées δn, $\delta\varepsilon$, δe, $\delta\varpi$, et celles des masses perturbatrices m', m'', etc.

Les observations de la latitude fourniront des équations semblables, qui serviront à corriger les deux autres élémens de l'orbe elliptique, c'est-à-dire ceux d'où dépend sa position dans l'espace. En effet, si l'on nomme φ l'inclinaison de l'orbite de m à l'écliptique fixe, α la longitude de son nœud ascendant, et S le sinus de la latitude, on aura $\mathrm{S}=\sin\varphi\sin(\mathrm{V}-\alpha)$; en différentiant par conséquent par rapport à φ et à α, on aura

$$\delta\mathrm{S}=\delta\varphi\cos\varphi\sin(\mathrm{V}-\alpha)-\delta\alpha\sin\varphi\cos(\mathrm{V}-\alpha).$$

Si donc on nomme S' le sinus de la latitude observée, et S le sinus de la latitude calculée par les formules du mouvement elliptique, on aura

$$\delta\varphi\cos\varphi\sin(\mathrm{V}-\alpha)-\delta\alpha\sin\varphi\cos(\mathrm{V}-\alpha)=\mathrm{S}'-\mathrm{S},$$

et chaque observation de la latitude fournira une équation semblable. En appliquant à ces équations la méthode des moindres carrés, il sera facile d'en tirer les valeurs des corrections $\delta\varphi$ et $\delta\alpha$, de ma-

nière à satisfaire le plus exactement possible à l'ensemble des observations.

Avec les élémens elliptiques et les masses perturbatrices ainsi corrigées, on construira de nouvelles tables du mouvement de la planète qui auront toute la précision que comportent les observations que l'on a employées. Chacune de celles qu'on fera dans la suite, comparée aux résultats de ces tables, fournira de nouvelles équations de condition que l'on ajoutera aux premières; et lorsque le temps aura permis d'en rassembler un assez grand nombre, en combinant entre elles les équations de condition, tant anciennes que modernes, on déterminera une seconde fois les corrections des masses et des élémens elliptiques avec lesquels on construira de nouvelles tables plus exactes que les premières. En continuant de la même manière, et en répétant cette opération à des intervalles de dix ou vingt ans, on parviendra, par des approximations successives, à donner aux tables astronomiques et aux élémens qui servent à les établir le plus haut degré de précision.

C'est de cette manière qu'ont déjà été construites deux fois depuis trente ans, les tables de Jupiter, Saturne et Uranus, que l'on peut regarder, pour l'ordre et la clarté, comme un modèle en ce genre. Ces tables, celles des deux premières planètes du moins, représentent avec un grand degré d'exactitude toutes les observations modernes. Cependant il est probable que l'on pourrait ajouter encore à leur précision, en rectifiant quelques parties de la grande

inégalité de Jupiter et de Saturne, omises par Laplace, ou qui ont été prises avec un signe contraire. Il serait surtout à désirer, comme je l'ai dit, qu'on reprît sous ce point de vue la discussion des équations de condition qu'a fournies la comparaison de la théorie et des observations, pour s'assurer si les corrections nouvelles qui en résulteront, ne donneraient pas à la masse de Jupiter une valeur plus concordante avec celle qu'on a conclue des élongations de ses satellites, d'après les observations les plus récentes, et celle qui résulte des perturbations que cause cette planète dans les mouvemens de Cérès, Junon et Vesta.

Les tables d'Uranus qui avaient, lors de leur formation, toute la précision de celles de Jupiter et de Saturne, ne représentent déjà plus, dit-on, que très imparfaitement les observations actuelles, si rapprochées cependant de cette époque. Il faut l'attribuer sans doute à ce que les observations faites avant que cet astre ne fût rangé parmi les planètes, n'ont pu être employées dans la construction des tables, à cause de leur peu de précision, et que celles qui ont été faites depuis 1781 n'étaient pas encore alors assez nombreuses. On a cru aussi qu'il serait possible que cette planète, qui s'éloigne à de si grandes distances du Soleil, dans les espaces où nos meilleures lunettes ne peuvent la suivre, rencontrât quelque planète inconnue qui causerait dans sa marche des perturbations sensibles. Mais ce sont là des suppositions qu'il ne sera permis de discuter qu'après un intervalle de temps assez considérable pour qu'on ait pu réunir un grand

nombre d'observations et former de nouvelles tables de la planète. On s'assurera alors si ces tables, plus exactes que les premières, sont encore insuffisantes pour représenter ses mouvemens.

115. Nous avons donné, dans le n° 79, livre II, les formules qui déterminent la position du plan invariable du système du monde, c'est-à-dire du plan qui reste toujours parallèle à lui-même pendant toute la durée du mouvement, et nous avons indiqué l'usage qu'en pourraient faire les astronomes, pour reconnaître dans tous les siècles les déplacemens des orbes planétaires, indépendamment des mouvemens propres des étoiles qui nous sont généralement inconnus. Si l'on nomme γ l'inclinaison du plan invariable à l'écliptique fixe de 1800, et Π la longitude de son nœud ascendant sur ce plan, on a, par le numéro cité,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\gamma \sin\Pi &= \frac{\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha}{\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi}, \\ \operatorname{tang}\gamma\cos\Pi &= \frac{\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha}{\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

le signe Σ représentant la somme de tous les termes semblables relatifs aux planètes m', m'', etc. En substituant pour chacune d'elles, dans ces formules, à la place de m, a, e, φ et α, leurs valeurs données n° 88, on a trouvé

$$\Pi = 103^\circ\ 8'\ 45'',$$
$$\gamma = 1^\circ\ 34'\ 16''.$$

En remplaçant ensuite e, φ et α par leurs valeurs

relatives à l'écliptique fixe, calculées pour l'époque de 2000 d'après les formules du n° 91, on a trouvé

$$\Pi = 103^\circ\ 8'\,50'',$$
$$\gamma = 1^\circ\,34'\,15''.$$

Ces valeurs s'écartent peu des précédentes ; les petites différences viennent sans doute des corrections dont peuvent encore avoir besoin les variations séculaires des excentricités et des nœuds des orbes planétaires. Il faut observer cependant que la différence entre les deux résultats est cinq fois plus grande sur la longitude du nœud que sur l'inclinaison, ce qui tient à ce que l'inclinaison γ du plan invariable sur l'écliptique étant peu considérable, les numérateurs des équations (1) sont tous deux de très petites quantités; en sorte que la valeur de tang Π étant donnée par la formule

$$\text{tang}\,\Pi = \frac{\Sigma . m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha}{\Sigma . m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha},$$

il en résulte nécessairement que de très petites différences dans les quantités $\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha$ e $\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha$, peuvent en produire de considérables dans la valeur de tang Π, et par suite dans celle de l'angle Π. La même remarque s'applique dans la théorie des perturbations des planètes et des comètes, aux formules qui donnent la position de l'orbite troublée par rapport à l'orbite primitive.

On doit donc regarder comme parfaitement éta-

blie la fixité du plan invariable. Cependant, dans un chapitre consacré spécialement à montrer les secours que la théorie peut fournir à l'Astronomie pratique, nous devons restreindre les idées peut-être exagérées que l'on pourrait se former de l'utilité de ce plan de direction constante, pour la détermination des mouvemens célestes. En effet, pour que la considération du plan invariable eût des avantages réels, il faudrait qu'on pût déduire, pour une époque quelconque, des données fournies par l'observation, la position de l'orbite de chaque planète relativement à ce plan. Or, c'est ce qui n'a pas lieu; ainsi, par exemple, au moyen des équations (1), on détermine bien la position du plan invariable sur l'écliptique, à un instant donné; mais pour en conclure réciproquement la position de l'écliptique rapportée au même plan, et pouvoir la comparer à celle qu'avait cette même écliptique à une autre époque quelconque, il faudrait qu'il existât sur le plan invariable une droite fixe d'où les longitudes fussent comptées. En considérant alors le triangle sphérique compris entre la droite fixe, la ligne des équinoxes et l'intersection de l'écliptique et du plan invariable, triangle dans lequel on connaîtrait l'angle γ formé par les deux plans, le côté Π compris entre la ligne des équinoxes et leur intersection commune, et le côté compris entre cette même ligne et la droite fixe, on déterminerait à chaque époque l'inclinaison de l'écliptique sur le plan invariable et la longitude de ses nœuds par rapport à une origine fixe; sa position serait, par conséquent, entièrement détermi-

née. Nous avons vu, n° 22, livre I, qu'en faisant abstractoin de toute attraction étrangère, et en n'ayant égard qu'à l'action mutuelle des corps qui le composent, le centre de gravité du système solaire était emporté dans l'espace d'un mouvement rectiligne et uniforme. M. Poisson a proposé d'adopter la projection sur le plan invariable de la droite que décrit ce centre, pour la ligne fixe d'où les longitudes sont comptées. Et en effet, cette ligne et ce plan sont peut-être les deux seules choses invariables que nous connaissions dans la nature. Mais pour réaliser cette idée, il faudrait que la direction du centre de gravité du système solaire fût dès à présent bien déterminée par l'observation ou par les données qui en résultent, et facile à retrouver à chacune des époques futures où l'on voudra faire usage du plan invariable; c'est ce qui n'a pas lieu et ce qu'on pourrait tout au plus espérer des progrès de la science, dans un avenir très éloigné.

Le plan invariable aujourd'hui peut donc faire connaître simplement les variations d'inclinaisons des orbes planétaires sur ce plan; mais quand bien même on arriverait à trouver une droite fixe qui pût servir à déterminer exactement les variations de leurs nœuds, toutes les difficultés ne seraient pas levées. En effet, ce qui surtout importe aux astronomes, c'est d'avoir les variations de l'écliptique vraie par rapport à un plan immuable, puisque c'est à l'écliptique qu'ils rapportent tous les mouvemens célestes; or, comme l'inclinaison du plan invariable sur l'écliptique fixe est très petite, il en résulte, comme on l'a vu, que la lon-

gitude de leur intersection commune, et par suite, la longitude du nœud de l'écliptique fixe ou mobile sur le plan invariable qui s'en déduit, ne peuvent jamais être déterminées avec une précision rigoureuse. Ainsi, de légères erreurs dans les observations, ou même celles qui résultent des quantités négligées dans les approximations d'où se déduisent les élémens du mouvement elliptique, en produiront de considérables dans le rapport de deux quantités $\Sigma . m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\alpha$ et $\Sigma m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\alpha$, et par suite, le nœud de l'écliptique sur le plan fixe paraîtra avoir beaucoup varié, sans que ce nœud ait subi des déplacemens considérables.

Heureusement, dans l'état actuel de l'Astronomie, la considération du plan invariable est peu nécessaire; son utilité pourrait se faire sentir, si, après l'une de ces grandes catastrophes qui bouleversent quelquefois les sociétés humaines, la culture des sciences venant à être interrompue pendant plusieurs siècles, à l'époque où la civilisation se ranimerait, on voulait connaître les véritables déplacemens qu'ont subis dans l'intervalle les orbes planétaires, indépendamment des mouvemens propres qu'ont pu avoir les étoiles. Mais lorsque des observations faites avec la précision qu'elles ont aujourd'hui, formeront une longue série de phénomènes dont la suite n'est jamais interrompue, les mouvemens de l'écliptique et des équinoxes pourront se déduire directement de la théorie et de l'observation, avec toute la précision nécessaire pour que le secours du plan *invariable* devienne tout-à-fait superflu. On ne voit pas, en effet, que jusqu'ici les astronomes

en aient fait aucun usage. Cependant, la découverte du plan *invariable*, par Laplace, n'en doit pas moins être regardée comme un beau théorème d'analyse, déduit des lois primordiales du mouvement, et les formules qui le déterminent forment entre les variations séculaires des élémens elliptiques des orbes planétaires, de nouvelles équations de condition qui servent à vérifier leurs valeurs.

116. Les variations séculaires des élémens elliptiques, en se développant par la suite des temps, fourniront le moyen le plus exact pour déterminer les corrections que doivent subir les masses des planètes. Les valeurs que nous leur avons supposées, déduites de la comparaison d'un grand nombre d'observations aux formules de la théorie, peuvent être déjà regardées comme très approchées, et sont ce que l'on peut attendre de plus exact dans l'état actuel de la science. La masse de Mercure, déterminée d'une manière empirique, laisse seule beaucoup d'incertitude; mais cette masse est si peu considérable, et les effets qu'elle produit sur les mouvemens des autres planètes sont si peu sensibles, qu'il ne peut résulter de son incorrection que de très légères différences dans la théorie des inégalités du système planétaire.

Les observations de la plus grande élongation du quatrième satellite de Jupiter faites par M. Airy dans ces derniers temps, ont considérablement augmenté la masse de cette planète, déduite des élongations du même satellite observées par Pound, contemporain de Newton, et les seules qu'on eût employées jusqu'ici pour déterminer la valeur de cette masse. Il

était à désirer que ces observations fussent vérifiées avec le plus grand soin ; nous avons appris que M. Arago s'en occupe en ce moment, et les résultats satisfaisans qu'on a droit d'attendre d'un observateur si habile, seront d'un heureux augure pour la nouvelle direction qu'il vient d'imprimer à l'Observatoire royal de Paris.

Espérons que M. Arago étendra ses recherches aux élongations des satellites de Saturne et d'Uranus; nous savons que leur observation est beaucoup plus difficile que celle des élongations des satellites de Jupiter ; mais c'est là un point délicat sur lequel les géomètres ont appelé depuis long-temps l'attention des astronomes, et qui ne peut rester plus long-temps indécis.

L'observation des petites planètes mérite aussi de fixer l'attention de nos astronomes. Nous avons été devancés, sur cet objet, par les savans de l'autre côté du Rhin, et ils ont déjà recueilli un assez grand nombre d'observations exactes, pour pouvoir les comparer aux inégalités déduites de la théorie. Le premier avantage qu'ils en ont retiré, est une correction importante dans la masse de Jupiter, que l'on avait adoptée depuis Newton.

Mais en même temps que l'Astronomie pratique va remonter parmi nous au rang qu'elle a jadis occupé, et que des obstacles dépendans des localités avaient pu seuls lui faire perdre un moment, nous ne devons pas oublier de rappeler qu'il est un héritage que les fondateurs du Bureau des Longitudes ont légué à leurs successeurs, et qui ne doit pas

péricliter en leurs mains; c'est le dépôt de nos tables astronomiques. Nous avons de très bonnes tables des mouvemens de Jupiter et Saturne; les tables d'Uranus, de Vénus, de Mars, de Mercure laissent à désirer. Mais avant tout, et comme base des autres travaux, les tables du Soleil, calculées par Delambre, doivent être reprises; nous devons à notre honneur de ne pas nous laisser gagner de vitesse sur ce point. Pour effectuer cette entreprise, le Bureau des Longitudes de France ne manque ni de calculateurs habiles, ni de savans géomètres pour les diriger; les tables anciennes serviront à en construire de nouvelles plus exactes que les premières. « Ainsi les travaux des astronomes, en s'ajoutant sans cesse à ceux des astronomes précédens, donneront enfin le plus haut degré de précision aux tables astronomiques et aux valeurs dont elles dépendent (*). »

Quant à nous, nous terminerons ici ce que nous avions à dire sur la partie de la théorie du système du monde qui traite des inégalités planétaires. Ce sujet nous a déjà fait dépasser les limites que nous nous étions prescrites, mais sa haute importance exigeait ce sacrifice. Nous avons exposé, dans la théorie des perturbations des planètes, les méthodes les plus ingénieuses que les géomètres aient inventées pour les déterminer; nous avons donné ensuite les expressions numériques de toutes les inégalités sensibles qui peuvent en résulter dans les mouvemens célestes, en employant les élémens elliptiques, et les valeurs

(*) *Mécanique céleste*, livre X.

des masses les plus concordantes avec les observations. L'exactitude avec laquelle ces formules représentent les plus anciennes observations qui nous soient parvenues, montre que les mouvemens planétaires ne sont soumis à l'influence d'aucun corps étranger au système solaire, et que la stabilité de ce système est sous ce rapport parfaitement assurée. La grande loi de l'attraction universelle suffit à tout ; il n'y a pas une inégalité des mouvemens célestes qui n'en dérive avec une admirable précision ; et lorsque, dans ces mouvemens, quelques anomalies étranges, qui semblaient échapper à toute explication, ont fait douter quelquefois de son exactitude ou de sa généralité, on a bientôt reconnu que le défaut des méthodes ou l'insuffisance des approximations avaient seuls empêché d'en reconnaître d'abord les causes simples et naturelles. Il n'y a pas long-temps encore, quelques géomètres, pour expliquer la différence des valeurs de la masse de Jupiter, déduites du calcul des inégalités des petites planètes et des équations fondamentales des tables de M. Bouvard, avaient supposé que l'attraction mutuelle des planètes ne dépend pas seulement de leurs masses et de leurs distances, mais encore de la substance du corps sur lequel elle s'exerce, et qu'ainsi il était nécessaire d'employer pour Jupiter une masse différente dans le calcul des inégalités de Saturne et dans celui des inégalités de Pallas, Junon, Cérès et Vesta. Mais les observations de M. Airy, en montrant que l'attraction de Jupiter sur ses satellites est la même que celle qu'il exerce sur les petites planètes, a déjà en partie ré-

futé cette assertion, et le nouveau travail dont s'occupe M. Bouvard, ne laissera bientôt certainement aucun doute à cet égard. Nous ne serons donc pas obligés de renoncer à cette admirable simplicité qui est l'un des caractères distinctifs de la grande loi découverte par Newton. L'action de la gravité, en raison directe des masses et inverse du carré des distances, *est la même sur tous les corps*, quelle que soit leur nature; elle rend compte de toutes les inégalités du mouvement des planètes et des satellites; elle s'applique avec la même précision à la détermination des perturbations des comètes, quoiqu'elles semblent composées de substances particulières; enfin, si l'on en croit les idées ingénieuses de Laplace sur l'origine du système planétaire, cette loi est l'unique agent qu'ait employé la suprême intelligence dans la création du monde physique. Ainsi, seule elle a présidé à sa formation, comme seule elle suffit aujourd'hui à ses mouvemens et à sa conservation.

FIN DU TROISIÈME VOLUME.

NOTES

RELATIVES AU LIVRE VI.

NOTE PREMIÈRE.

Sur l'expression de la fonction perturbatrice.
(*Voyez* chap. Ier.)

Pour simplifier dans le n° 1 du livre VI, nous avons choisi pour plan de projection un plan passant par la commune intersection des orbites des planètes m et m' ; mais il est aisé de voir que l'expression de la fonction R qui en résulte, a cependant toute la généralité dont elle est susceptible, ce qui tient à ce que cette fonction ne dépend, comme on l'a vu, que des distances mutuelles de m et m', et de leur distance à l'origine des coordonnées, et doit être par conséquent absolument indépendante des axes auxquels elles sont rapportées.

En effet, soient comme dans le n° 1, chapitre 1er, x, y, z, les coordonnées rectangulaires de m relatives à des axes quelconques, soient x', y', z' les coordonnées de m', faisons

$$\rho = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2},$$

et désignons par v et v' les longitudes des deux planètes m et m' comptées respectivement dans leurs orbites, à partir de leur intersection avec le plan fixe que nous supposerons être celui des coordonnées x et y.

En nommant i l'inclinaison de l'orbite de m sur le plan

fixe, et θ la longitude de son nœud ascendant, on aura

$$x = r\cos\theta\cos v - r\sin\theta\cos i\sin v,$$
$$y = r\sin\theta\cos v + r\cos\theta\cos i\sin v,$$
$$z = r\sin i\sin v.$$

En nommant θ' et i' ce que deviennent θ et i par rapport à m', on aura de même

$$x' = r'\cos\theta'\cos v' - r'\sin\theta'\cos i'\sin v';$$
$$y' = r'\sin\theta'\cos v' + r'\cos\theta'\cos i'\sin v',$$
$$z' = r'\sin i'\sin v'.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de ρ^2, on trouve

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta'-\theta)\cos v\cos v' - 2rr'\cos i\sin(\theta'-\theta)\sin v\cos v'$$
$$+ 2rr'\cos i'\sin(\theta'-\theta)\cos v\sin v'$$
$$- 2rr'[\cos i\cos i'\cos(\theta'-\theta) + \sin i\sin i']\sin v\sin v'.$$

On voit déjà par cette expression, qui ne contient que l'arc $\theta'-\theta$ compris entre les nœuds des deux orbites, que ρ et par conséquent la fonction R, sont indépendantes de la droite d'où les longitudes sont comptées sur le plan fixe.

Pour introduire dans la fonction précédente les constantes qui fixent la position de la commune intersection des deux orbites, j'observe que les angles v et v' étant comptés des nœuds des orbites de m et de m' sur le plan fixe, si l'on nomme Π la longitude de leur commune intersection comptée sur le plan de la première, et Π' cette même longitude comptée sur l'orbite de m', qu'on désigne par ν et ν' les longitudes des deux planètes comptées de cette même droite et sur les plans de leurs orbites respectives, on aura

$$v = \nu + \Pi - \theta, \quad v' = \nu' + \Pi' - \theta'.$$

Si l'on substitue pour v et v' leurs valeurs dans l'expression de ρ^2, on aura

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'[\cos(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta') - \cos i''\sin(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta')]\cos(\nu+\Pi-\theta)\cos\nu'$$
$$+2rr'[\cos(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta') + \cos i''\sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta')]\cos(\nu+\Pi-\theta)\sin\nu'$$
$$-2rr'\Big\{[\cos i\cos i''\cos(\theta'-\theta) + \sin i\sin i'']\sin(\Pi'-\theta')$$
$$+\cos i\sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta')\Big\}\sin(\nu+\Pi-\theta)\cos\nu'$$
$$-2rr'\Big\{\cos i\cos i''\cos(\theta'-\theta) + \sin i\sin i'']\cos(\Pi'-\theta')$$
$$-\cos i\sin(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta')\Big\}\sin(\nu+\Pi-\theta)\sin\nu'.$$

Considérons le triangle sphérique compris entre les plans des orbites de m et m', et le plan fixe; nommons I l'inclinaison mutuelle des deux premiers plans : $\Pi-\theta$, $\Pi'-\theta'$, et $\theta'-\theta$, seront les trois côtés de ce triangle, et $180^\circ - i''$, i et I les angles respectivement opposés à chacun d'eux. Par les formules de la Trigonométrie sphérique, on aura

$$\cos(\Pi-\theta) = \cos(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta') - \cos i''\sin(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta'),$$
$$\cos I\sin(\Pi-\theta) = \cos(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta') + \cos i''\sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta'),$$
$$\cos i\sin(\Pi-\theta) = \sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta') + \cos i''\cos(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta'),$$
$$\sin i\sin(\Pi-\theta) = \sin i''\sin(\Pi'-\theta'),$$
$$\cos I = \cos i\cos i'' + \sin i\sin i''\cos(\theta'-\theta),$$
$$\cos(\Pi'-\theta') = \cos(\theta'-\theta)\cos(\Pi-\theta) + \cos i\sin(\theta'-\theta)\sin(\Pi-\theta).$$

En vertu de ces relations, le coefficient de................ $-2rr'\cos(\nu+\Pi-\theta)\cos\nu'$, dans l'expression de ρ^2, se réduit à $\cos(\Pi-\theta)$; le coefficient du terme $+2rr'\cos(\nu+\Pi-\theta)\sin\nu'$, se réduit à $\cos I\sin(\Pi-\theta)$, le coefficient du terme...... $-2rr'\sin(\nu+\Pi-\theta)\cos\nu'$ peut s'écrire ainsi

$$\cos i[\sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta') + \cos i''\cos(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta')]$$
$$+\sin i\sin i''\sin(\Pi'-\theta'),$$

qui, en vertu des relations précédentes devient

$$\cos^2 i\sin(\Pi-\theta) + \sin^2 i\sin(\Pi-\theta), \text{ ou simplement } \sin(\Pi-\theta).$$

Enfin, le coefficient du dernier terme de la même fonction, multiplié par $\cos(\theta'-\theta)$, peut prendre cette forme

$$[\cos i\cos i'' + \sin i\sin i''\cos(\theta'-\theta)]\cos(\Pi'-\theta')$$
$$-\cos i\sin(\theta'-\theta)[\cos(\theta'-\theta)\sin(\Pi'-\theta') + \cos i''\sin(\theta'-\theta)\cos(\Pi'-\theta')],$$

ou bien

$$\cos I\,[\cos(\Pi' - \theta') - \cos i \sin(\theta' - \theta)\sin(\Pi - \theta)].$$

En substituant pour $\cos(\Pi' - \theta')$ sa valeur, et divisant par $\cos(\theta' - \theta)$ le résultat, on voit que le coefficient cherché se réduit à $\cos I \cos(\Pi - \theta)$.

On aura donc ainsi

$$\begin{aligned} \rho^2 = r^2 + r'^2 &- 2rr' \cos(\Pi - \theta)\cos(v + \Pi - \theta)\cos v' \\ &+ 2rr' \cos I \sin(\Pi - \theta)\cos(v + \Pi - \theta)\sin v' \\ &- 2rr' \sin(\Pi - \theta)\sin(v + \Pi - \theta)\cos v' \\ &- 2rr' \cos I \cos(\Pi - \theta)\sin(v + \Pi - \theta)\sin v'. \end{aligned}$$

Ou en réduisant

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos v \cos v' - 2rr' \cos I \sin v \sin v'.$$

On voit que cette valeur ne dépend plus que de l'inclinaison mutuelle des deux orbites, et de la position respective de m et de m' relativement à leur commune intersection. Cette expression est identique avec celle que nous avons trouvée n° 1. Si au lieu de compter les longitudes de la commune intersection des deux orbites, on voulait leur donner une origine quelconque, il suffirait de retrancher de v et v' les angles Π et Π' qui expriment la longitude de cette intersection, comptée respectivement sur les plans de chacune des orbites.

NOTE II.

Sur les formules qui déterminent les variations de l'inclinaison et des nœuds. (*Voyez* page 24.)

On peut arriver d'une autre manière aux formules du n° 4, livre VI.

En effet, faisons

$$x = r\cos(v-\alpha),\quad y = r\sin(v-\alpha)\cos\varphi,\quad z = r\sin(v-\alpha)\sin\varphi,$$
$$x' = r'\cos(v'-\alpha'),\quad y' = r'\sin(v'-\alpha')\cos\varphi',\quad z' = r'\sin(v-\alpha')\sin\varphi',$$

les angles α et α' désignant les longitudes de l'intersection commune des deux orbites comptées respectivement l'une sur le plan de l'orbite de m, l'autre sur le plan de l'orbite de m'.

Si l'orbite de m est supposée très peu inclinée au plan fixe des x et des y, et qu'on néglige le carré de l'inclinaison φ de ces deux plans, les coordonnées x et y seront indépendantes de φ, et si l'on fait

$$p = \sin\varphi\sin\alpha,\quad q = \sin\varphi\cos\alpha;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{z}{r} = q\sin v - p\cos v;$$

on aura simplement

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{dp} &= -\, r\cos v\,\frac{dR}{dz}, \\ \frac{dR}{dq} &= -\, r\sin v\,\frac{dR}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En différentiant la valeur de R, et en faisant dans la différentielle $z = 0$, ce qui est permis lorsqu'on prend, comme nous le ferons, pour plan de projection celui de l'orbite primitive de m, et qu'on néglige le carré des forces

perturbatrices, on a

$$\frac{dR}{dz} = m'z' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right).$$

Si l'on nomme γ l'inclinaison mutuelle des deux orbites à l'instant que l'on choisit pour époque, et Π la longitude de leurs nœuds, en prenant le plan de l'orbite de m pour le plan fixe auquel on rapporte les mouvemens des deux planètes, on aura $\gamma = \varphi'$ et $\alpha = \alpha' = \Pi$. Par conséquent

$$z' = r' \sin (v' - \Pi) \sin \gamma.$$

Si l'on substitue cette valeur dans $\frac{dR}{dz}$, et qu'ensuite on remplace $\frac{dR}{dz}$ par sa valeur dans les équations (1), on aura

$$\frac{dR}{dp} = - m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin \gamma \sin (v' - \Pi) \cos v,$$

$$\frac{dR}{dq} = \quad m' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin \gamma \sin (v' - \Pi) \sin v.$$

Maintenant, par la substitution de la valeur de V, on a, n° 1, page 4,

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v' - v) \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - 2rr' \cos(v' + v - 2\Pi) \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma.$$

On a d'ailleurs

$$R = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{r^2 + r'^2 - \rho^2}{2r'^3}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{d\rho} = - \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \rho.$$

On a d'ailleurs $\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dv}$, $\frac{dR}{d\gamma} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{d\gamma}$, $\frac{dR}{d\Pi} = \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{d\Pi}$; on trouvera ainsi

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\nu} = m'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \left[\sin(\nu' - \nu)\cos^2\tfrac{1}{2}\gamma - \sin(\nu' + \nu - 2\Pi)\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\right],$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} = 2m'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \sin(\nu' + \nu - 2\Pi),$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma} = -\frac{m'}{2}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \sin\gamma\,[\cos(\nu' - \nu) - \cos(\nu' + \nu - 2\Pi)].$$

Maintenant, si l'on multiplie la première de ces valeurs par tang $\frac{1}{2}\gamma \cos\Pi$, la seconde par $\frac{\cos\Pi}{\sin\gamma}$, la troisième par $\sin\Pi$, et qu'on les ajoute ; qu'on multiplie ensuite la première par tang $\frac{1}{2}\gamma \sin\Pi$, la seconde par $\frac{\sin\Pi}{\sin\gamma}$, la troisième par $-\cos\Pi$, et qu'on les ajoute, on trouvera

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\sin\Pi + \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\cos\Pi = m'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'\sin\gamma\sin(\nu' - \Pi)\cos\nu$$

$$-\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\cos\Pi + \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\sin\Pi = m'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr'\sin\gamma\sin(\nu' - \Pi)\sin\nu;$$

on aura par conséquent

$$\frac{d\mathrm{R}}{dp} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\sin\Pi - \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\cos\Pi,$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dq} = -\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\cos\Pi + \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\sin\Pi.$$

Par les formules du n° 44, livre II, on a

$$dp = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dq}\right), \quad dq = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\mathrm{R}}{dp}\right).$$

On aura donc enfin

$$dp = -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\cos\Pi - \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\sin\Pi\right],$$

$$dq = \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{d\mathrm{R}}{d\gamma}\sin\Pi + \left(\frac{1}{\sin\gamma}\frac{d\mathrm{R}}{d\Pi} + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\frac{d\mathrm{R}}{d\nu}\right)\cos\Pi\right],$$

On fera coïncider ces formules avec celles du n° 4, en observant que les longitudes sont, dans ce numéro, supposées comptées de l'intersection des deux orbites, ce qui donne $\Pi = 0$; qu'à la variable γ on a substitué la variable λ déterminée par l'équation $1 - \cos\gamma = \frac{1}{2}\lambda^2$, ce qui donne $\frac{dR}{d\gamma} = \cos\frac{1}{2}\gamma\frac{dR}{d\lambda}$, et qu'on a d'ailleurs $\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\epsilon} + \frac{dR}{d\varpi}$.

NOTE III.

Sur les fonctions elliptiques. (*Voyez* page 87.)

Si l'on fait $x = \sin\varphi$, $y = \sin\varphi'$, la différentielle de l'équation ($\mathcal{C}$) deviendra

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\mu dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c'^2y^2}}. \quad (1)$$

Soit $x = \frac{\mu y\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-c'^2y^2}}$, ce qui donne

$$\mu^2y^4 - (\mu^2 + c'^2x^2)y^2 + x^2 = 0. \quad (2)$$

En différentiant cette équation on trouve

$$\frac{ydy}{x(1-c'^2y^2)} = \frac{dx}{\mu^2+c'^2x^2-2\mu^2y^2},$$

ou bien en substituant pour x sa valeur

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c'^2y^2}} = \frac{\mu dx}{\mu^2+c'^2x^2-2\mu^2y^2}.$$

Si l'on multiplie par μ les deux membres de cette équation, en vertu de l'équation (1) on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{\mu^2dx}{\mu^2+c'^2x^2-2\mu^2y^2}.$$

Mais de l'équation (2) on tire

$$2\mu^2y^2 = \mu^2 + c'^2x^2 - \sqrt{(\mu^2+c'^2x^2)^2 - 4\mu^2x^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{dx}{\mu^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{(\mu^2+c'^2x^2)^2 - 4\mu^2x^2}}.$$

Si l'on compare les dénominateurs dans les deux membres, on aura

$$c'^4 = c^2\mu^4, \quad 2 - c'^2 = \frac{(1+c^2)\mu^2}{2};$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{c'}{\sqrt{c}}, \quad c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

On aura donc ainsi pour μ et c' des valeurs réelles, et l'équation (1) pourra toujours être satisfaite. Si pour x et y on substitue leurs valeurs dans l'expression de x, on aura

$$\sin\varphi = \frac{\mu \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \cos^2\varphi'}}, \quad c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad \mu = \frac{c'}{\sqrt{c}},$$

valeurs qui satisferont à l'équation (C), n° 22, ainsi que nous l'avons supposé.

NOTE IV.

Sur la stabilité du système planétaire. (*Voy.* p. 227.)

On a entre les excentricités et les tangentes des inclinaisons des orbes planétaires les équations de condition suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} e^2 m\sqrt{a} + e'^2 m'\sqrt{a'} + e''^2 m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = C, \\ \text{tang}^2\varphi m\sqrt{a} + \text{tang}^2\varphi' m'\sqrt{a'} + \text{tang}^2\varphi'' m''\sqrt{a''} + \text{etc.} = C'. \end{array}\right\} (a).$$

Lagrange, dans le n° 102 de la section VII de la *Mécanique analytique*, dit : « Il suit de là que si les excentricités des orbites (et par conséquent les tangentes des inclinaisons) qui appartiennent à des masses très grandes sont une fois très petites, elles le seront toujours, ce qui est le cas de Jupiter et de Saturne; mais celles qui appartiennent à des masses très petites pourront croître jusqu'à l'unité et au-delà, et l'on ne pourra déterminer leurs véritables limites que par l'intégration des équations différentielles qui les déterminent. »

Cette remarque, que j'ai développée avec détail n° 56, paraît avoir été mal saisie par Laplace, qu'il est si rare de trouver en défaut. En effet, après l'avoir reproduite dans le n° 2, livre XV de la *Mécanique céleste*, il ajoute : « Lagrange en conclut que l'on ne peut être alors assuré que les excentricités conserveront toujours une petite valeur qu'*en résolvant l'équation algébrique qui détermine les coefficiens du temps dans les sinus et cosinus des expressions de* e *sin* ϖ, e *cos* ϖ, e' *sin* ϖ', etc., *et en s'assurant que les racines de cette équation sont toutes réelles*. Mais si ce grand géomètre eût considéré ce que j'ai dit dans le n° 57 du livre II de la *Mécanique céleste*, il aurait vu que sans recourir à cette résolution je démontrais que les racines sont toutes réelles et inégales. »

Or, d'après la manière dont Laplace traduit l'observation de Lagrange, il est évident qu'il n'en a pas apprécié toute la portée. En effet, Lagrange ne dit pas qu'il suffise, pour que les ex-

centricités et les inclinaisons soient toujours très petites, que l'équation dont il est question ait toutes ses racines réelles; mais bien qu'il faillut que les valeurs des excentricités et des inclinaisons, données par l'intégration des formules différentielles qui les déterminent, demeurent toujours très petites, ce qui exige que la seconde condition énoncée n° 56, livre VI, soit aussi satisfaite, comme nous l'avons fait voir dans le numéro cité. La réfutation de Laplace tombe donc à faux, puisqu'elle ne s'applique pas à l'observation de Lagrange prise dans son véritable sens.

Quant au passage de la *Mécanique céleste* cité par Laplace, nous en avons reproduit l'esprit dans le n° 65 du livre II; mais puisque l'occasion s'en présente, nous ferons sur ce sujet une observation. Si l'on relit avec attention le passage cité de la *Mécanique céleste*, et qu'on se demande ensuite quelles sont les vraies conséquences qu'on en doit tirer, on conclura, il me semble, que pour satisfaire aux équations de condition (*a*), l'équation que nous avons désignée par $X = o$ dans le n° 56, livre VI, doit avoir toutes ses racines réelles et inégales, ou, ce qui revient au même, que pour que les excentricités et les inclinaisons ne puissent pas croître indéfiniment, il faut que cette condition soit nécessairement satisfaite; or, n'est-ce pas ce que l'on sait d'avance par la forme même des valeurs des excentricités et des inclinaisons, et n'est-ce pas une espèce de cercle vicieux dans lequel on tourne sans rien prouver? C'est seulement, selon moi, de l'équation algébrique $X = o$ que l'on peut déduire la preuve que la première des conditions nécessaires à la stabilité du système planétaire est satisfaite; et, ce qui serait à désirer, c'est que par la seule inspection de la formation analytique de cette équation, on pût démontrer la réalité et l'inégalité de ses racines; mais cela paraît très difficile lorsqu'on considère à la fois le système des sept planètes principales, et jusqu'à ce qu'on y soit parvenu, la résolution numérique de cette équation est le seul moyen de s'assurer de la réalité de ses racines, comme je l'ai fait n° 92 du livre VI,

NOTE V. (*Voir* page 348.)

Moyens mouvemens sidéraux des planètes pour une année julienne de $365^j \frac{1}{4}$*, ou valeurs de* n, n′, etc.

Mercure.....	n	= 5381016″,53
Vénus.......	n'	= 2106641,42
La Terre.....	n''	= 1295977,37
Mars........	n'''	= 689051,08
Jupiter......	n^{IV}	= 109256,59
Saturne......	n^{V}	= 43996,00
Uranus......	n^{VI}	= 15425,49

d'où l'on a conclu :

Distances moyennes des planètes au Soleil ou demi-grands axes de leurs orbites.

Mercure.....	a	= 0,38709888
Vénus.	a'	= 0,72333228
La Terre.....	a''	= 1,00000000
Mars........	a'''	= 1,52369210
Jupiter......	a^{IV}	= 5,20115524
Saturne.	a^{V}	= 9,53797320
Uranus......	a^{VI}	= 19,18251740

Telles sont les valeurs des moyens mouvemens et des distances moyennes qui résultent des tables astronomiques les plus récentes ; ce sont celles qu'on aurait dû employer dans le calcul des perturbations planétaires : mais en les comparant aux valeurs que nous avons adoptées n° 88, on voit qu'il n'en peut provenir dans les résultats aucune différence sensible. Les valeurs des autres élémens des orbites elliptiques, relatifs à l'année 1800, que nous avons prise pour époque, n'ont besoin d'aucun changement.

NOTES DIVERSES.

Sur la comète de 1759.

L'époque qui s'approche du retour de cette comète à son périhélie donne un intérêt pour ainsi dire de circonstance à sa théorie. Quelques géomètres se sont étonnés que les élémens de l'orbite pour 1835, que j'ai donnés n° 47 du livre III, ne coïncidassent pas avec ceux que j'ai présentés dans la *Connaissance des Tems* pour 1833; mais ils ont sans doute oublié que les résultats rapportés dans le livre III sont ceux qu'a obtenus M. Damoiseau, comme je l'ai annoncé n° 41, livre cité, tandis que dans la *Connaissance des Tems* j'ai présenté ceux de mes propres calculs. Ce qui m'a engagé à recourir au travail de M. Damoiseau pour les exemples numériques que je voulais donner, c'est que cet astronome avait adopté la division *sexagésimale* du cercle, que j'ai suivie dans tout le cours de cet ouvrage, tandis que dans mon mémoire sur ce sujet j'ai préféré, pour la commodité du calcul, la division décimale. Ce mémoire va enfin paraître dans la collection de l'Académie des Sciences, tome VI (*Savans étrangers*); j'en ai extrait les résultats suivans, convertis en secondes sexagésimales, et qui proviennent des dernières corrections que j'ai fait subir aux masses perturbatrices, et des altérations relatives à l'action de la Terre, que je n'avais considérée qu'à partir du périhélie de 1759, et dont l'influence sur la comète pendant les trois mois qui ont précédé ce passage, quoique moins forte que celle qu'elle a exercée pendant les trois mois qui l'ont suivi, sera pourtant assez sensible, sur la durée de la période actuelle, pour qu'on en tienne compte. Il faut rectifier, sur ce point, ce que j'ai dit dans la note V du tome II de cet ouvrage.

En partant des élémens résultant de la discussion des observations de 1682 et de 1759, faite avec grand soin par

Burckhardt (*), et en employant pour les masses de Jupiter, Saturne et Uranus les valeurs que nous avons adoptées n° 87, livre VI, j'ai trouvé par le calcul des perturbations que la comète a subies dans l'intervalle des passages de 1682 et 1759 :

	Altérations de l'anomalie moyenne. $\Sigma\delta\zeta$.	Altérations du moyen mouvement diurne. $\Sigma\delta n$.
♃	+ 17010",48	+ 0",336854
♄	+ 393,76	+ 0,028336
♅	+ 339,20	+ 0,013963
⛢	»	— 0,006502
	+ 17743,44	+ 0,372651

Le moyen mouvement au périhélie de 1682 aura pour expression $\frac{360^\circ - \Sigma\delta\zeta}{27937}$ nommant donc n, on aura $n = 45'',75496$; et en nommant $n' = n + \Sigma\delta n$ le moyen mouvement diurne au périhélie de 1759, on aura $n' = 46'',12761$.

Le calcul des perturbations pendant la période de 1759 jusqu'au prochain retour m'a donné ensuite :

	Altérations de l'anomalie moyenne. $\Sigma\delta\zeta$.	Altérations du moyen mouvement diurne. $\Sigma\delta n$.
♃	+ 1356",94	+ 0",3978441
♄	+ 1979,27	— 0,0889308
♅	+ 129,23	+ 0,0091954
⛢	+ 721,47	+ 0,0258207
	+ 4286,91	+ 0,3439294

En nommant T' l'intervalle entre le passage au périhélie de 1759 et le prochain retour au même point de son orbite, on aura

(*) *Connaissance des Tems* pour 1819.

$$T' = \frac{360^\circ - \Sigma\delta\zeta}{n'} = 28003^j,03,$$

ce qui, à compter du 12,6 mars 1759, origine de la période, répond au 12,6 novembre 1835, ou bien au 13,1 novembre, le jour étant compté de minuit.

M. Damoiseau a fixé ce passage au 4,82 novembre 1835. Je me suis assuré qu'en introduisant dans ses calculs les corrections nécessaires pour ramener les valeurs des masses qu'il a employées à celles qui sont aujourd'hui généralement adoptées, il n'en résulterait aucune altération notable dans les résultats. La différence de 8 jours qui existe entre nous tient donc uniquement à celle des élémens elliptiques dont nous sommes partis, et à la marche des calculs.

Le moyen mouvement diurne à l'instant du passage sera de 46",12761 + 0",343929 = 46",471539, et le demi-grand axe correspondant 17",99755.

Pour déterminer les autres élémens de l'orbite elliptique à la même époque, le calcul des perturbations pendant l'intervalle de 1759 jusqu'au prochain retour m'a donné :

Altérations de l'excentricité, du périhélie et des variables qui déterminent l'inclinaison et la longitude du nœud.

	$\Sigma\delta e$	$\Sigma\delta\varpi$	$\sin\varphi \sin\theta$	$\sin\varphi \cos\theta$
♃...	− 0,00035796	− 850"18	− 0,00073447	− 0,00342496
♄...	+ 0,00034304	− 84,55	− 0,00010410	− 0,00030874
♅...	− 0,00002658	− 23,11	− 0,00000766	+ 0,00002593
	− 0,00004150	− 957,84	− 0,00084623	− 0,00370777

L'excentricité de l'orbite, d'après les élémens que nous avons adoptés, en 1759, était 0,9675571 ; on aura donc pour l'excentricité en 1835, 0,9675571 − 0,0000415 = 0,9675156.

Les valeurs de $\sin\varphi \sin\theta$ et $\sin\varphi \cos\theta$ supposent que l'on a pris pour plan fixe celui de l'orbite de la comète en 1759. On en tire, pour l'inclinaison et pour la longitude du nœud ascendant de l'orbite mobile sur ce plan,

$$\varphi = 12' 64'', \quad \theta = 167^\circ 8' 36''.$$

La petitesse des valeurs de sin φ sin θ et sin φ cos θ fait que la valeur de l'angle θ peut laisser beaucoup d'incertitude. (*Voir ce que nous avons dit à cet égard* n° 115, livre VI.)

On a d'ailleurs pour le mouvement direct du périhélie par rapport aux fixes,

$$\Sigma\delta\omega = -957'',84 ;$$

d'où, en considérant le triangle intercepté sur la sphère céleste, entre l'orbite de la comète en 1759, son orbite troublée et l'écliptique vraie, on conclura pour 1835 :

Inclinaison de l'orbite de la comète à l'écliptique.	17° 44′ 24″
Mouvement direct du nœud ascendant..........	35.44
Distance du nœud ascendant au périhélie.......	249. 1.43

En ajoutant à l'altération du nœud 1° 4′ 5″ pour la précession des équinoxes dans l'intervalle de 76 ans, on aura sa variation par rapport à l'équinoxe mobile. La longitude du nœud en 1759 était 53° 50′ 11″ ; elle sera donc au prochain passage 55° 30′; et en réunissant les résultats précédens, on formera le tableau suivant des élémens de l'orbite de la comète à son retour au périhélie de 1835.

Élémens de la comète en 1835.

Instant du passage au périhélie, 13 novembre 1835.	
Demi-grand axe.......................	17,99755
Excentricité..........................	0,9675156
Lieu du périhélie sur l'orbite...........	304° 31′ 43″
Longitude du nœud ascendant............	55.30′
Inclinaison de l'orbite à l'écliptique.....	17.44.24
Sens du mouvement, *rétrograde.*	

C'est d'après ces élémens que M. Bouvard a construit l'éphéméride qui se trouve dans la *Connaissance des Tems* pour 1837.

Du plan invariable du système du monde.

Nous ne comptions pas revenir sur cet objet, mais une note insérée par M. Poinsot dans la 6e édition de ses *Élémens de Statique,* prouve qu'il ne fait aucun compte des observations qu'ont provoquées les objections élevées par lui contre la théorie du *plan invariable* selon Laplace; il est donc nécessaire de rappeler encore une fois toutes les raisons qui nous forcent à persister dans notre opinion (*).

Sans nous arrêter aux argumens de nos adversaires, que nous pourrions appeler *purement spéculatifs,* attachons-nous à ceux qui peuvent se traduire en nombres, car ce sont les seuls qui soient sans réplique dans de pareilles discussions : mettons d'abord de notre côté l'autorité des chiffres; la question sera bientôt tranchée.

« Je vais, dit M. Poinsot en parlant du plan invariable de Laplace, montrer que ce plan invariable *varie,* que sa variation n'est pas extrêmement petite, comme on pourrait croire, mais qu'elle est du *même ordre* que la précession des équinoxes, mouvement sensible dans le ciel, etc.

» Pour faire voir sans calcul, de la manière la plus évidente, ce défaut des formules de M. Laplace, il n'y a qu'à l'appliquer au cas le plus simple de tous, celui où le système ne serait composé que de deux corps.

» Ne considérons donc que la Terre et le Soleil, et suppo-

(*) Il doit être bien entendu qu'il n'est ici question que de la théorie du plan invariable, et cela ne change rien à ce que nous avons dit no 115, livre VI, relativement à son utilité pratique. Nous n'examinerons pas non plus la question sous le rapport des difficultés astronomiques que présenterait la détermination du plan que l'on a proposé de substituer au plan *invariable* de Laplace. Celui-ci est toujours facile à retrouver; la position du plan *maximum des aires* dépend au contraire de quantités qui nous seront toujours inconnues.

sons même, afin de rendre la chose plus manifeste, que le Soleil soit parfaitement sphérique, qu'il ne tourne pas sur son axe, et que son centre agisse exactement comme un point où toute la masse serait concentrée.

» Par les formules de M. Laplace, il est évident que le plan invariable serait le plan même de l'orbite de la Terre, ou ce qu'on appelle le plan de l'*écliptique*, de sorte que ce plan serait immobile ou *toujours parallèle à lui-même dans l'espace.* Or, je dis que dans ce cas les nœuds de l'écliptique sur un plan fixe varieraient d'une manière très sensible. »

J'ai cité l'objection tout entière pour qu'on ne puisse pas m'accuser d'en avoir affaibli la valeur. Je pourrais, pour toute réponse, renvoyer au n° 86 du livre VI, où cette objection avait été comme devinée, mais puisqu'on insiste, insistons.

En conservant toutes les notations du n° cité et en n'ayant égard qu'à l'action du Soleil sur la Terre, regardée comme un ellipsoïde homogène, en nommant φ et φ' les inclinaisons respectives de l'écliptique et de l'équateur sur un plan fixe quelconque, θ et θ' les longitudes de leurs nœuds sur le même plan, les équations (3), n° 86, donneront

$$\left.\begin{aligned} m\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi + C\omega\cos\varphi' &= l, \\ m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\cos\theta - C\omega\sin\varphi'\cos\theta' &= l', \\ m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi\sin\theta - C\omega\sin\varphi'\sin\theta' &= l''. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Supposons que le plan fixe passe par l'intersection commune de l'équateur et de l'écliptique ou par la ligne des équinoxes, et qu'il partage l'angle $\varphi+\varphi'$ que forment entre eux ces deux plans, de manière qu'on ait

$$m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi - C\omega\sin\varphi' = 0. \quad (2)$$

Les deux dernières équations (1) donneront $\theta = \theta'$, et par suite $l = 0$, $l' = 0$, c'est-à-dire que le plan dont il s'agit sera le plan *maximum* des aires ou le plan rigoureusement in-

variable dans le système que nous considérons; et si l'on nomme $\gamma = \varphi + \varphi'$ l'obliquité de l'écliptique, en élevant au carré l'équation (2) et la première des équations (1), et en les ajoutant on en tirera

$$\cos\gamma = \frac{l^2 - m^2a(1-e^2) - C^2\omega^2}{2m\sqrt{a(1-e^2)}\,C\omega}.$$

Si l'on néglige le carré de l'excentricité e de l'orbe terrestre, le second membre de cette équation se réduit à une constante; l'obliquité de l'écliptique ne variera donc pas; et comme les équations (1) et (2) donnent encore

$$\cos\varphi = \frac{l^2 + m^2a(1-e^2) - C^2\omega^2}{2ma(1-e^2)l},$$

$$\cos\varphi' = \frac{l^2 + C^2\omega^2 - m^2a(1-e^2)}{2ma(1-e^2)l},$$

les angles φ et φ' seront également constans. Ainsi donc, dans ce cas, l'inclinaison de l'équateur et de l'écliptique sur le plan fixe et leur inclinaison mutuelle seront constantes, et ces trois plans auront toujours une intersection commune. Cette intersection ne sera pas fixe, mais dans son mouvement elle ne quittera pas le plan *maximum* des aires et ce mouvement sera uniforme. Il est facile de se représenter le mouvement d'un pareil système en imaginant que les pôles de l'équateur et de l'écliptique tournent autour du pôle du plan principal de projection, de manière à ce que la ligne des équinoxes demeure toujours sur ce plan; cependant le plan de l'écliptique restera toujours très peu incliné au plan fixe, et par conséquent à très peu près parallèle à lui-même. En effet, en négligeant le carré de e, et en observant qu'on a $\sqrt{a} = a^2n$, n étant le moyen mouvement de la Terre dans son orbite, l'équation (2) donne

$$ma^2n\sin\varphi = C\omega\sin\varphi'.$$

En nommant D le rayon de l'équateur, on a $C = \frac{2}{5} mD^2$, et par le n° 86, livre VI, on a

$$\frac{\frac{2}{5} D^2 \omega}{a^2 n} = 0,0000002\,5399.$$

En supposant donc $\varphi' = 23^\circ\, 27'\, 50''$, on trouve que l'angle φ est moindre que $0'',0209$; on peut donc supposer que le plan de l'écliptique se confond avec le plan principal de projection, et comme l'inclinaison mutuelle de ces deux plans est constante, leur identité se maintiendra toujours.

Maintenant, si l'on considère le cas général, l'équation (2), en la différentiant, donnera à très peu près

$$ma^2 n \sqrt{1 - e^2}\, \delta\varphi = C\omega \cos\varphi' \delta\varphi'.$$

En substituant pour C sa valeur, et en supposant, comme précédemment, $\varphi' = 23^\circ\, 27'\, 50''$, cette équation donne

$$\delta\varphi = 0,0000002329\,\delta\varphi'.$$

Il s'en faut donc beaucoup que, comme l'assure M. Poinsot, les variations du plan invariable soient alors du même ordre que les variations de l'équateur. Nous avons trouvé, n° 98, $16'\, 16''$ pour la variation de l'obliquité de l'écliptique depuis le temps d'Hipparque jusqu'au commencement de ce siècle; en supposant donc $\delta\varphi' = 976''$, on aura

$$\delta\varphi = 0'',00022739.$$

Ainsi en 1928 ans, l'inclinaison de l'écliptique sur le plan fixe n'aurait pas varié de 2 dix-millièmes de seconde; on peut donc la regarder comme insensible, et considérer, dans ce cas, le plan de l'écliptique comme *invariable*, conformément à la théorie de Laplace.

Quant aux observations de M. Poinsot relativement au mouvement des nœuds, comme on a, d'après les équations (1), $\theta = \theta'$, il est clair que le nœud de l'écliptique aura sur le plan fixe le même mouvement que l'équateur, en sorte que leur intersection commune demeurera toujours sur ce plan ; mais cela n'implique pas contradiction, puisqu'une variation très légère dans l'inclinaison mutuelle de deux plans, supposée très petite, peut en produire de considérables dans la position de leur commune intersection.

Le second exemple choisi par M. Poinsot pour mettre en défaut la théorie de Laplace, consiste à supposer que le système est formé du Soleil, de la Terre et de la Lune, considérés comme des points massifs. Dans ce cas, le plan invariable, selon les idées de ce grand géomètre, est celui que décrit le centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, ce qui diffère peu du plan de l'écliptique. Montrons qu'en effet ce plan coïncide toujours, à très peu près, avec le plan *maximum* des aires décrites par les centres de gravité de la Terre et de la Lune. Il est clair que ce système revient à celui de deux planètes m et m' réagissant l'une sur l'autre, que nous avons considéré n° 55, livre II, et le plan invariable sera déterminé par les équations (1), dans lesquelles il suffira de changer $C\omega$ en $m'\sqrt{a'(1-e'^2)}$, m' étant la masse de la Lune, a' et e' le demi-grand axe et l'excentricité de son orbite autour de la Terre. Si l'on nomme donc φ et φ' les inclinaisons respectives de l'écliptique et de l'orbite lunaire sur le plan *maximum* des aires, on aura

$$m\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varphi = m'\sqrt{a'(1-e'^2)}\sin\varphi'. \qquad (3)$$

Or on a, à très peu près,

$$\frac{m}{m'} = 74{,}946, \quad \sqrt{\frac{a}{a'}} = 20.$$

En négligeant donc les carrés des excentricités e et e', et en

supposant $\varphi' = 5^\circ\, 8'\, 38''$, qui est l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, on trouvera que l'angle φ ne s'élève pas à $12''$. En différentiant l'équation (3), on aura, à très peu près,

$$\delta\varphi = \frac{m'\sqrt{a'}}{m\sqrt{a}}.\cos\varphi'.\delta\varphi';$$

d'où l'on conclut, d'après les valeurs précédentes,

$$\delta\varphi = 0{,}00066446\,\delta\varphi';$$

et comme l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie est constante, malgré le mouvement séculaire de l'écliptique, si l'on suppose $\delta\varphi' = 976''$, valeur supérieure à celle qu'on peut supposer à la variation de l'orbe lunaire sur un plan fixe, depuis le temps d'Hipparque jusqu'à nos jours, on trouve $\delta\varphi = 0'',64$ pour la variation de l'orbe terrestre en 1928 ans : ce plan peut donc être considéré comme *invariable* dans le système que nous considérons.

Quant aux nœuds de l'écliptique sur le plan *maximum* des aires, on a $\theta = \theta'$, et d'après les équations (1), le nœud ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec le nœud descendant de l'écliptique, et réciproquement; par conséquent, comme le mouvement du nœud de l'orbe lunaire sur l'écliptique fixe est d'environ 19° par an, il est clair que l'intersection des plans des orbites de la Terre et de la Lune aura sur le plan *maximum* des aires un mouvement très rapide, ce qui n'empêchera pas le plan de l'écliptique de rester toujours à très peu près parallèle à lui-même, et de remplir, par conséquent, la seule condition qui caractérise le plan invariable (*).

(*) On ne doit pas oublier qu'il ne s'agit ici que d'un cas particulier qui est sans application dans le système du monde. Laplace en calculant, n° 29, livre VII, les inégalités lunaires dues à la non-sphéricité de la Terre, trouve que son influence sur les déplacemens de l'orbite de la Lune serait d'augmenter de $0{,}00000026384\,nt$ le mouvement rétrograde des nœuds, nt étant le moyen

On conçoit, en effet, que dans les deux systèmes que nous venons de considérer, comme on a $\gamma = \varphi + \varphi'$, et par suite $\delta\gamma = \delta\varphi + \delta\varphi'$, si $\delta\varphi$ est une assez petite quantité pour qu'on puisse la négliger par rapport à $\delta\varphi'$, on aura simplement $\delta\gamma = \delta\varphi$, c'est-à-dire que les variations de l'équateur dans le premier cas, et celle de l'orbe lunaire dans le second, par rapport au plan invariable tel qu'il résulte de la théorie de Laplace, seront les mêmes que celles de ces deux plans par rapport à un troisième plan qui serait rigoureusement fixe; les différences seront absolument insensibles. Or, ce grand géomètre n'a jamais prétendu autre chose; l'invariabilité du *plan invariable* tel qu'il le définit n° 62 du livre II de la *Mécanique céleste*, comme les inégalités de tous les mouvemens planétaires, n'est qu'approchée et exacte qu'autant qu'on néglige dans le mouvement de translation les perturbations résultantes de la forme et des dimensions des corps célestes. Dans le n° 21 du livre Ier, Laplace a donné la théorie générale du plan invariable pour un système de corps quelconques réagissant les uns sur les autres; il en a fait l'application au système du monde dans le livre II, en profitant de tous les avantages qu'offrait sa constitution pour faciliter le calcul des mouvemens planétaires, question assez difficile pour qu'on ne cherche pas sans nécessité à la compliquer.

Les équations (1) nous montrent encore que quand bien même les seconds termes des premiers membres seraient comparables et mêmes supérieurs aux premiers, ce qui aurait lieu, par exemple, si les aires que ces termes représentent provenaient de la rotation du Soleil, on pourrait encore prendre l'écliptique pour le plan invariable du système, bien que par sa position il différât sensiblement, dans ce cas, du plan *maximum* des aires.

---

mouvement de la Lune dans son orbite. Cette quantité est absolument insensible, et à plus forte raison par conséquent la non sphéricité de la Terre ne peut avoir sur la position du plan invariable aucune action appréciable. Le même résultat a lieu par rapport à l'ellipticité du Soleil, comme nous l'avons vu n° 79, livre VI.

Cette observation, d'après ce qui a été dit n° 86, livre VI, n'a pas besoin de développement. Mais, disent nos adversaires, il existe donc selon vous plusieurs plans invariables dans le système planétaire? Pourquoi non, cela dépend entièrement de sa constitution. Supposons, en effet, que Jupiter, Saturne et Uranus forment un système à part, sur lequel les autres planètes n'aient aucune influence, comme cela a déjà lieu, à très peu près, dans le système solaire. Eh bien! n'y aurait-il pas trois plans invariables dans un pareil système, celui qui a lieu dans le système particulier des trois planètes considérées isolément, celui qui a lieu pour l'ensemble du système, et le plan *maximum* des aires.

Il est donc évident que les objections présentées contre la théorie du plan invariable de Laplace tiennent à des considérations tout-à-fait fautives et à la confusion que l'on a faite des variations des inclinaisons et des nœuds. Sans doute, géométriquement parlant, l'intersection de deux plans invariables est elle-même invariable; mais on peut toujours supposer, et c'est le cas de la nature, que la position de l'un de ces plans subisse des variations assez petites pour qu'il reste toujours sensiblement parallèle à lui-même, tandis que ses nœuds sur le plan qui est rigoureusement fixe, éprouvent des déplacemens considérables.

Mais le véritable défaut de l'argumentation de nos adversaires, et nous l'avons déjà remarqué ailleurs, vient de ce qu'ils veulent traiter par des méthodes rigoureuses la théorie du système du monde, qui n'est au fait qu'un grand problème d'approximation; c'est pour cela que ce problème se refuse aux méthodes synthétiques, et qu'il rentre dans le domaine de l'analyse; et si ce puissant auxiliaire de l'esprit humain n'est, comme on l'a osé dire, qu'un instrument, on conviendra du moins que c'en est un bien précieux que celui qui nous a livré la clé du mécanisme des cieux, et qui nous éclaire sur tant d'erreurs où les simples notions de la Géométrie nous auraient infailliblement conduits.

Concluons donc de cette discussion, à laquelle nous avons donné quelque développement pour n'être pas forcé d'y revenir, qu'il n'y a pas lieu d'apporter aucune modification dans la théorie du *plan invariable* présentée par Laplace; *c'est avec raison et surtout avec connaissance de cause* qu'il a fait abstraction des quantités qu'il a négligées dans sa détermination; ces quantités sont du même ordre que celles qu'on néglige ordinairement dans la théorie des inégalités planétaires, et que le calcul, comme l'observation, autorise à regarder comme absolument insensibles.

FIN DES NOTES.